



## Varmetransmission ved ledning, konvektion og stråling

Vej-Hansen, Cecilie; Rode, Carsten

*Publication date:*  
2010

[Link back to DTU Orbit](#)

*Citation (APA):*  
Vej-Hansen, C., & Rode, C. (Eds.) (2010). *Varmetransmission ved ledning, konvektion og stråling*.

---

### General rights

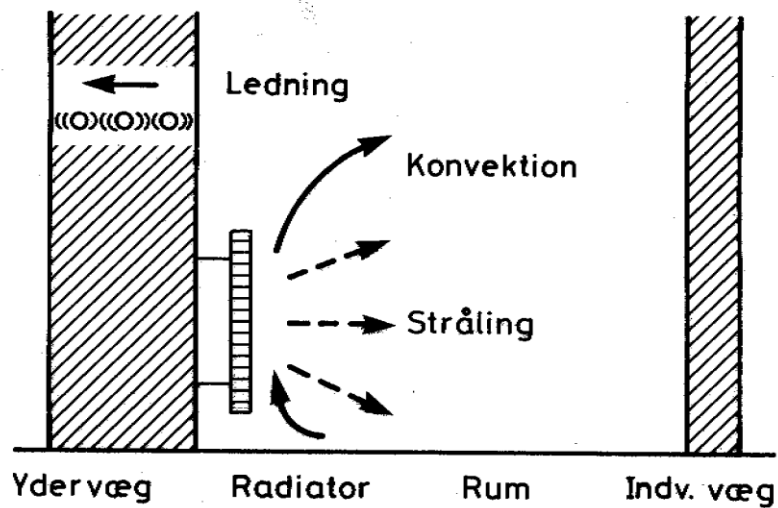
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

# Varmetransmission ved ledning, konvektion og stråling

Forelæsningsnotat, DTU Byg





## Forord

Varme opfattes i termodynamikken som noget, der tilføres et system under en proces, og behandles her ud fra et processynspunkt. Den mere praktiske og bygningsingeniørrelevante side af problemet, hvordan varmen tilføres og fordeler sig, bliver taget op i emnet varmetransmission. Her vil teorien til brug for beregning af bygningers energiforbrug blive udledt og illustreret med eksempler.

Den teoretiske baggrund er grundlæggende termodynamik, som vil blive refereret, hvor det er fundet nødvendigt for forståelsen. Der vil derfor blive lagt vægt på den teori, der har direkte relation til varmetransmissionen.

Varmetransmission som en helhed består af varmeledning, varmestråling og konvektion, der alle vil blive behandlet i dette notat. Da verden ikke er ideel, vil der i konstruktionsdele forekomme flere former for varmetransmission, så til hjælp til beregning af varmetransmission for konstruktioner, er der beskrevet i afsnittet om sammensat varmetransmission, hvordan der kan tages højde for dette.

Teorien tænkes anvendt som baggrund til forståelse af normer og standarder indenfor bygningsfysik. I fremstillingen vil der derfor så vidt muligt blive anvendt de symboler, der bliver benyttet i standarder og normer.

Dette notat tager udgangspunkt i tidligere forelæsningsnotater brugt ved kursus 11111 og kursus 11738.

Børge Howald Petersen	Stationær varmetransmission
Charlotte Gudum og Carsten Rode	Varmetransmission ved ledning
Carsten Rode	Varmetransmission ved konvektion
Charlotte Gudum og Carsten Rode	Stråling
Jørgen Erik Christensen	Varmeisolering 1, Bind 2



## Indholdsfortegnelse

Forord .....	i
Symbolliste.....	v
Indices.....	vi
1. Mekanismer for varmetransmission.....	1
1.1 Definition af varmetransmission .....	1
1.2 Sammensat varmeoverføring .....	2
1.2.1 Isolans .....	3
1.2.2 Overgangsisolanser.....	4
1.2.3 Varmeoverføringskoefficient.....	4
1.2.4 Varmetransmissionskoefficient .....	5
2. Endimensional varmeledning gennem homogene lag .....	7
3. Endimensional varmeledning gennem inhomogene lag .....	14
4. Endimensional varmeledning gennem rørvægge.....	15
5. Konvektion .....	25
6. Konvektive modeltal .....	30
6.1 Reynolds tal .....	30
6.2 Nusselt-tallet.....	32
6.3 Prandtl-tallet.....	32
6.4 Grashof-tallet.....	32
6.5 Rayleigh-tallet.....	33
6.6 Særlige betingelser for bestemmelse af modeltallene.....	33
7. Typiske konvektionstilfælde .....	34
7.1 Strømning hen over plane flader .....	34
7.1.1 Tvungen laminar strømning.....	34
7.1.2 Tvungen turbulent strømning.....	34
7.1.3 Naturlig konvektion, konstant fladetemperatur .....	34
7.1.4 Naturlig konvektion, konstant varmestrøm .....	35
7.2 Strømning mellem to parallelle flader.....	38
7.2.1 Tvungen konvektion .....	38
7.2.2 Naturlig konvektion .....	39
7.3 Strømning i rør og kanaler .....	42
7.3.1 Laminar strømning.....	42

7.3.2	Turbulent strømning .....	42
7.4	Strømning omkring rør og kanaler .....	43
7.4.1	Tvungen konvektion omkring enkeltrør/kanaler .....	43
7.4.2	Naturlig konvektion omkring rør.....	45
8.	Stråling .....	49
8.1	Wiens forskydningslov .....	50
8.2	Plancks lov .....	50
8.3	Lamberts cosinuslov.....	51
9.	Strålingsdefinitioner .....	51
10.	Spejlende- og diffus overflade .....	53
11.	Strålingsudveksling mellem sorte overflader .....	54
11.1	Vinkelforhold.....	54
12.	Strålingsudveksling mellem grå overflader .....	56
13.	Strålingsudveksling mellem vilkårlige overflader.....	58
14.	Strålingsisolans.....	60
Bilag 1: Skema til varmetransmission .....		A
Bilag 2: Diagrammer til bestemmelse af vinkelforholdet .....		B

## Symbolliste

$A$	$[m^2]$	Areal
$b$	$[m]$	Bredde
$C$	$[J/K]$	Varmekapacitet
$c$	$[J/kgK]$	Specifik varmekapacitet
$D$	$[m]$	Diameter
$d$	$[m]$	Tykkelse
$h$	$[W/m^2K]$	Varmeoverføringskoefficient
$L$	$[m]$	Karakteristisk længde
$l$	$[m]$	Længde
$\lambda$	$[W/mK]$	Varmeledningsevne
$m$	$[kg]$	Masse
$\Phi$	$[W, J/s]$	Varmestrøm
$Q$	$[J]$	Energi, varmemængde
$q$	$[W/m^2]$	Varmestrømstæthed
$R$	$[m^2K/W]$	Isolans
$r$	$[m]$	Radius
$\rho$	$[kg/m^3]$	Densitet
$T$	$[K]$	Temperatur
$t$	$[s]$	Tid
$U$	$[W/m^2K]$	Varmetransmissionskoefficient
$u$	$[m/s]$	Hastighed
$V$	$[m^3]$	Volumen



## Indices

$i$	Inde (internal)
$s_i$	Overflade inde
$e$	Ude (external)
$s_e$	Overflade ude
$L$	Ledning
$K$	Konvektion
$S$	Stråling

# 1. Mekanismer for varmetransmission

Temperaturen af et legeme er et udtryk for legemets indre energi. Et legemes indre energi (molekylernes kinetiske energi) kan øges ved tilførsel af varme eller arbejde. Middelværdien for molekylernes hastighed er et udtryk for legemets indre energi og dermed for temperaturen. I faste stoffer sidder molekylerne i en fast gitterstruktur, så de enkelte atomer vibrerer med en gennemsnitlig frekvens, der er stigende med stigende temperatur.

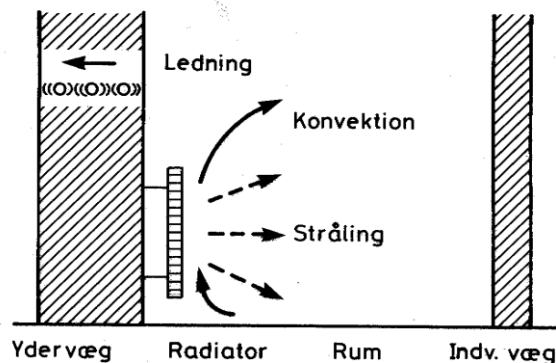
## 1.1 Definition af varmetransmission

Ved varmetransmission forstås en af sig selv løbende, irreversibel varmetransport mellem legemer af forskellig temperatur.

To legemer med forskellig temperatur udveksler energi, idet det varme legeme afgiver energi til det kolde legeme ved varmetransmission. Fra termodynamikkens 2. hovedsætning vides, at denne proces er irreversibel.

Varme transmitteres i hovedsagen på tre forskellige måder:

- *Varmeledning.* Varmeledning er overførsel af energi ved tilfældige stød mellem atomare partikler uden at der sker stoftransport.
- *Konvektion.* Ved konvektion overføres energi gennem bevægelsen af en fluid mellem et varmt og et koldt legeme, altså en stoftransport af væske eller gas.
- *Varmestråling.* Ved varmemestråling overføres energi i form af elektromagnetisk stråling mellem flader.



Figur 1.1: Illustration af varmetransportformerne ledning, konvektion og stråling

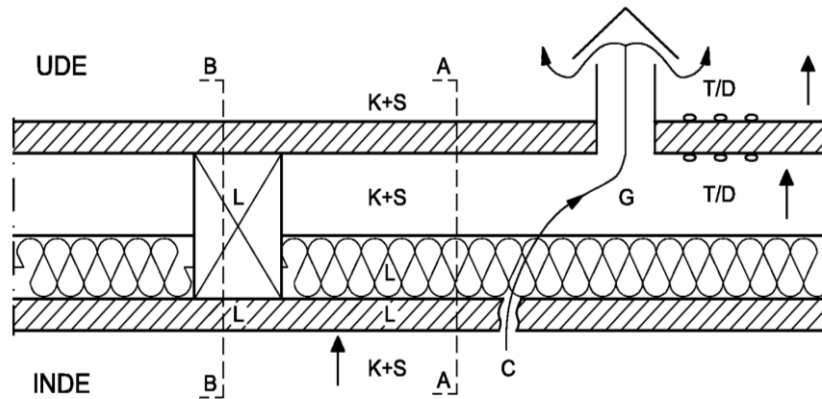
Desuden transmitteres varme, når der sker en samtidig massetransport:

- Ved gennemstrømning af et varmebærende medium
- Ved fordampning
- Ved fortætning (kondensation)

De tre sidste varmetransmissionsformer bliver ikke analyseret nærmere.

## 1.2 Sammensat varmeoverføring

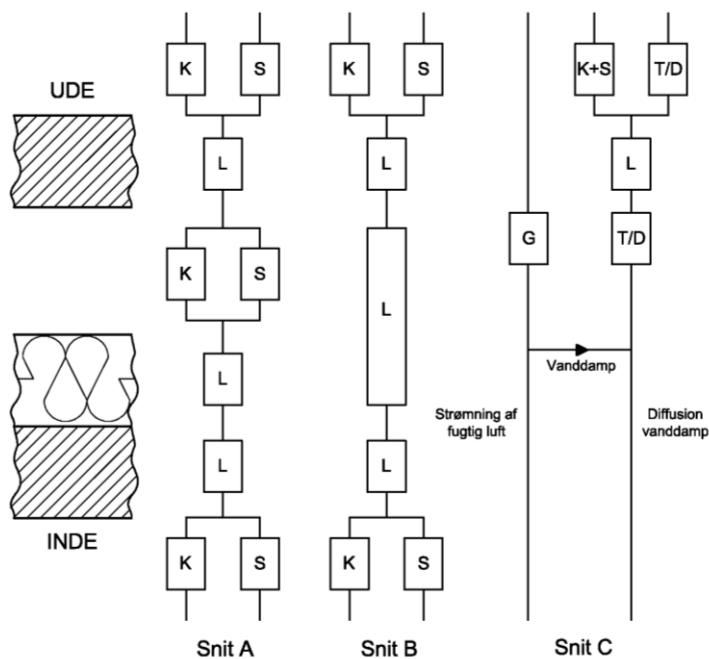
For at illustrere de forskellige former for varmeoverføring betragtes varmetransmission igennem en tagkonstruktion. Et snit gennem denne er vist på Figur 1.2.



Figur 1.2: Snit gennem en tagkonstruktion

Snit A, B og C illustrerer forskellige former for varmeoverføring. De anvendte symboler er:

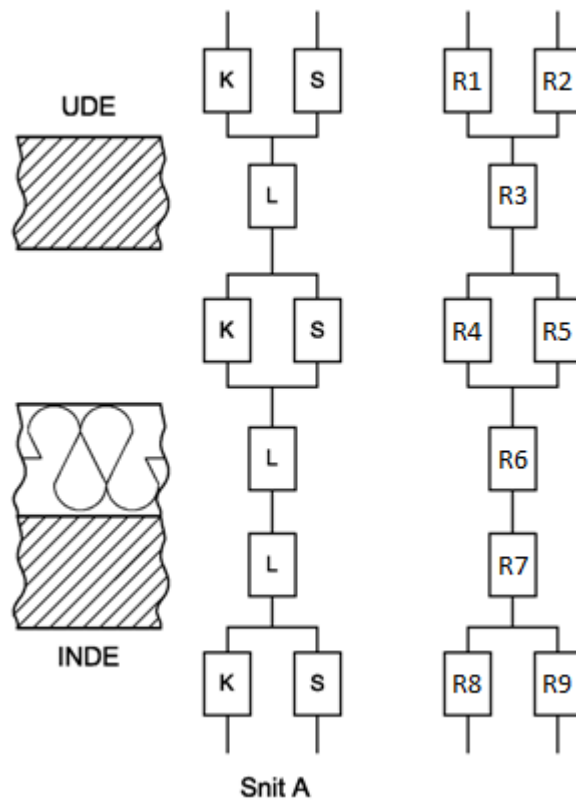
L:	Ledning	G:	Strømning
S:	Stråling	D:	Fordampning
K:	Konvektion	T:	Fortætning



Figur 1.3: Blokdiagram, der viser forskellige former for varmeføring i de forskellige snit vist på Figur 1.2

### 1.2.1 Isolans

På Figur 1.3 er de enkelte snit i tagkonstruktionen illustreret med blokdiagrammer for at få et bedre overblik over, hvordan de enkelte former for varmeoverføring finder sted. Varmetransmissionsvejene kan illustreres med modstande, eller isolanser, der indikeres med symbolet  $R$  [ $\text{m}^2\text{K/W}$ ]. Begrebet er analogt til modstande i el-læren. Her yder de altså modstand mod en strøm af varme. Figur 1.4 viser, hvordan isolanserne for snit A er opstillet i forhold til varmeoverførselstypen.



Figur 1.4: Isolanser fra snit A – nummereret

Isolanser kan enten seriekobles eller parallelkobles.

I en bygningskonstruktion er isolanserne for to på hinanden følgende lag seriekoblede. I dette tilfælde, se Figur 1.4, er isolans  $R_6$  og  $R_7$  koblet i serie, og den samlede isolans af de to,  $R_{6-7}$ , findes ved

$$R_{6-7} = R_6 + R_7 \quad (1.1)$$

Hvis de to isolanser i stedet var parallelkoblede, sådan som fx isolanserne for konvektion og stråling ved luftlag (fx isolans  $R_4$  og  $R_5$  i Figur 1.4), findes den samlede isolans  $R$  af ligningen:

$$\frac{1}{R_{4-5}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \Leftrightarrow R_{4-5} = \frac{1}{\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} \quad (1.2)$$

Det er nu muligt at finde en konstruktions totale isolans, når det vides, at konstruktionens lag er seriekoblede samtidig med at det er muligt, at have parallelkoblede isolanser inden for et eller flere af lagene. Den totale isolans for konstruktionen gennem snit A findes da til:

$$R_{total} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} + R_3 + \frac{1}{\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} + R_6 + R_7 + \frac{1}{\frac{1}{R_8} + \frac{1}{R_9}} \quad (1.3)$$

### 1.2.2 Overgangsisolanser

På samme måde som der er isolanser for de enkelte lag, er der også en isolans mellem den fri luft og overfladerne af konstruktionen. Overgangsisolanserne,  $R_{se}$  og  $R_{si}$ , er den isolans, der forbinder konstruktionens overflader med den udendørs og indendørs luft. Overgangsisolanserne er sammensat af konvektion og stråling og kan beregnes ud fra formler for konvektion og stråling. De samlede overgangsisolanser findes da til:

$$R_{se} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \quad R_{si} = \frac{1}{\frac{1}{R_8} + \frac{1}{R_9}} \quad (1.4)$$

Typisk vil overgangsisolanserne kun tælle en lille del af den samlede varmemodstand, så derved kan standardværdier benyttes

**Tabel 1.1: Standardværdier for indvendig og udvendig overgangsisolans,  $R_{si}$  og  $R_{se}$ , målt i  $m^2K/W$**

Varmestrømsretning	Opad	Vandret	Nedad
$R_{si}$	0,10	0,13	0,17
$R_{se}$	0,04	0,04	0,04

Her ses det, at de samlede overgangsisolanser er små, og specielt er den udvendige overgangsisolans lille, fordi vinden let fjerner varmen fra fladens yderside, og fordi fladen ikke modtager særlig meget tilbagestråling fra det kolde himmelrum.

### 1.2.3 Varmeoverføringskoefficient

Undertiden bruges også varmeoverføringskoefficienten,  $h$  [ $W/(m^2K)$ ], i stedet for isolansen. Varmeoverføringskoefficienten er den reciprokke værdi af isolansen:

$$h = \frac{1}{R} \quad (1.5)$$

Dette gælder for hver enkelt af isolanserne; hvert lag kan altså have en varmeoverføringskoefficient, eller man kan eksplicit angive, at der er tale om varmeoverføringskoefficienten for ledning, stråling eller konvektion,  $h_L$ ,  $h_K$  og  $h_S$ . Varmeoverføringskoefficienterne bruges kun om de enkelte lag i konstruktionen,

og ikke om hele konstruktionen, hvor varmetransmissionskoefficienten,  $U$ , benyttes (se nedenfor).

Hyppigt refereres til varmeovergangskoefficienterne  $h_{se}$  og  $h_{si}$  der er de varmeoverføringskoefficienter, der gælder ved bygningsdelens overflader mod henholdsvis det fri og mod det indendørs rum.

#### 1.2.4 Varmetransmissionskoefficient

Varmetransmissionen, eller varmetabet, gennem en arealenhed af en konstruktion pr. grad K temperaturforskel over konstruktionen kaldes varmetransmissionskoefficienten,  $U$ -værdien [ $\text{W}/(\text{m}^2\text{K})$ ].  $U$ -værdien er den reciproke værdi af konstruktionens totale isolans, inklusive overgangsisolanserne:

$$U = \frac{1}{R_{total}} \quad (1.6)$$

$U$ -værdien kendetegner altså varmetransmissionen for hele konstruktionen fra den indendørs luft til den udendørs luft.

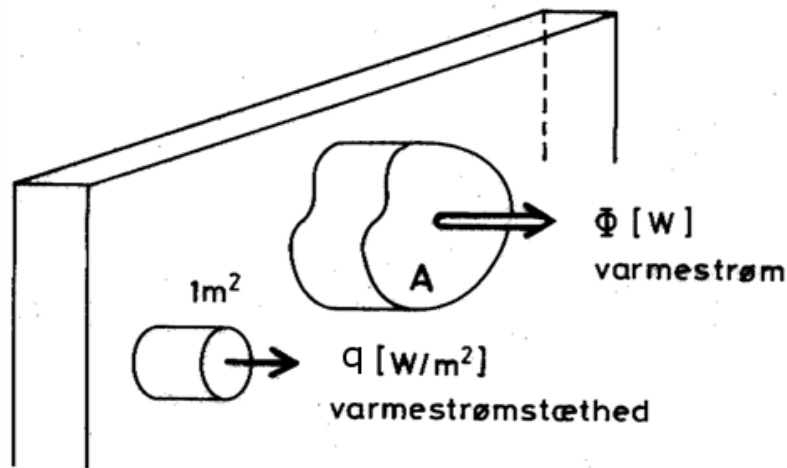
En lille varmetransmissionskoefficient udtrykker en godt isolerende væg. Ydervægge og tage i nybyggeri har typisk  $U = 0,15-0,3 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$  ( $R_{total} = 6,7-3,3 \text{ m}^2\text{K}/\text{W}$ ). Bygningsreglementet BR10 stiller forskellige krav til de enkelte bygningsdeles  $U$ -værdier ud fra et princip om, at de skal være så små, som de med rimelighed kan blive.



## 2. Endimensional varmeledning gennem homogene lag

Når et isoleret legeme betragtes, viser erfaringen, at eventuelle temperaturforskelle, der måtte være i legemet til start, vil blive udjævnet efter nogen tid. I denne proces foregår en energiudveksling mellem de varme og kolde dele af legemet, hvor varmen ledes til de koldere dele af legemet.

Tilsvarende finder der varmetransmission sted gennem en væg eller en bygningsdel, når der er forskellige temperaturer på dens overflader, idet der ved ledning overføres varme fra høj mod lav temperatur. For en bygning er denne varmestrøm (sammen med varmetabet på grund af ventilation) bestemmende for opvarmningsbehovet.



Figur 2.1: Definition af varmestrøm og varmestrømstæthed

På Figur 2.1 angiver  $\Phi$  varmestrømmen (energitransporten pr tidsenhed [J/s]) gennem et fladeareal  $A$ , mens størrelsen  $q$  angiver varmestrømstætheden, der er varmestrømmen pr enhedsareal af fladen, varmen strømmer igennem. Den kunne også kaldes energiens strømningshastighed – både med hensyn til størrelse og retning. Mellem de to størrelser gælder

$$\Phi = q_m \cdot A \quad (2.1)$$

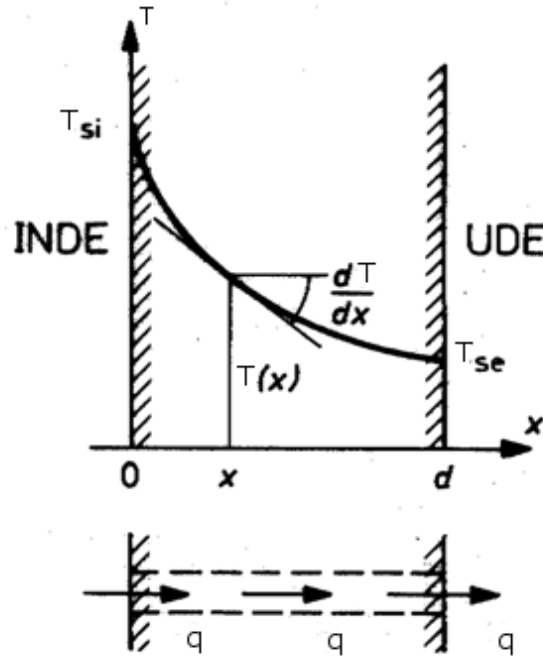
En generel to- eller tredimensional beregning af  $q$  sker ud fra Fouriers lov kombineret med en kontinuitetsbetragtning for varmen. For endimensional strømning parallelt med en  $x$ -akse lyder Fouriers lov

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad (2.2)$$

Varmestrømstætheden,  $q$ , i den givne retning,  $x$ , er ifølge Fouriers lov proportional med temperaturens fald pr længdeenhed i samme retning.



Proportionalitetsfaktoren afhænger af det betragtede materiales termiske egenskaber, materialets varmeledningsevne  $\lambda$ . Formlens minus skyldes at  $dT/dx$  udtrykker temperaturtilvæksten pr længdeenhed og ikke temperaturfaldet.



Figur 2.2: Temperaturfordelingens gradient ved endimensional strømning gennem homogen væg

I en homogen væg med ensartet tykkelse og stor udstrækning forløber varmemstrømmen endimensionalt gennem væggen. På Figur 2.2 varierer temperaturen mellem de to overfladers temperatur,  $T_{si}$  og  $T_{se}$ , og til bestemmelse af temperaturvariationen ind gennem væggen omskrives Fouriers lov (2.2) til

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{q}{\lambda} \quad (2.3)$$

hvor  $q$  er konstant (uafhængig af  $x$ ), fordi der ikke er nogen varmemstrøm på tværs af de små strømkkanaler vist på figuren. Der findes dog tilfælde, hvor  $q$  ændrer sig i strømrretningen, fx når nystøbt beton afgiver varme under afbindingen, men sådanne tilfælde betragtes ikke her. Integration af (2.3) giver

$$T = -\frac{q}{\lambda}x + T_{si} \quad (2.4)$$

idet  $T = T_{si}$  er indsat som randbetingelsen for  $x = 0$ . Temperaturen varierer altså retlinet gennem væggen. Den anden randbetingelse  $T = T_{se}$  for  $x = d$  indsættes.

$$T_{se} = -\frac{q}{\lambda}d + T_{si} \quad (2.5)$$

Hermed bestemmes varmestrømtætheden til

$$q = \lambda \frac{T_{si} - T_{se}}{d} = \frac{T_{si} - T_{se}}{R_m} \quad (2.6)$$

hvor den homogene vægs isolans  $R_m$  er indført

$$R_m = \frac{d}{\lambda} \quad (2.7)$$

Formlen viser at betegnelsen isolans (isoleringssevne) er valgt, fordi isolansen er proportional med lag-tykkelsen – dobbelt lagtykkelse giver dobbelt isoleringssevne – og vokser med aftagende varmeledningsevne  $\lambda$ . Hvis det på forhånd var vidst, at temperaturvariationen var retlinet, kunne (2.6) bestemmes direkte af (2.2), da  $dT/dx = (T_{si} - T_{se})/d$ .

I formel (2.6) er  $T_{si}$  og  $T_{se}$  overfladetemperaturer og ikke lufttemperaturer. Hvis fladetemperaturen og lufttemperaturen var ens, ville der ikke være fysiske drivkræfter til at føre varmen fra indeluften til væggen inderside og videre fra væggen yderside til udeluften. Allerede Figur 1.1 viste, hvorledes en temperaturforskel mellem den indvendige vægoverflade og indeluften igangsætter en konvektion, hvor indeluften afkøles af den koldere væg og synker nedad, hvorved mere indeluft strømmer til ovenfra og bliver afkølet. Det giver en resulterende effekttransport ind mod væggen. Et tilsvarende bidrag fremkommer, fordi væggen afgiver varmestråling til rummets andre vægge, men disse sender endnu mere varmestråling tilbage, fordi de er varmere, og varmestrålingen vokser med temperaturen. På lignende måde føres varme fra den udvendige vægoverflade til udeluften. Ved at benytte varmeovergangskoefficienterne,  $h$ , kan effektoverførslerne skrives på formen

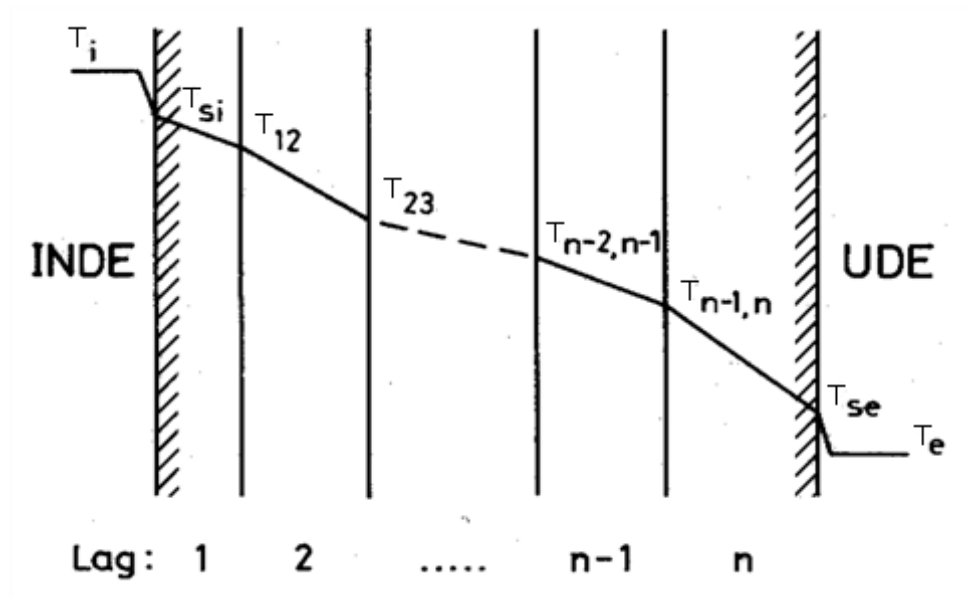
$$q = h_i(T_i - T_{si}) = \frac{T_i - T_{si}}{R_{si}} \quad (2.8)$$

$$q = h_e(T_{se} - T_e) = \frac{T_{se} - T_e}{R_{se}}$$

Nu løses (2.6) og (2.8) med hensyn til højresidernes temperaturforskel, og de 3 temperaturforskelle adderes Dette er gældende for en væg med et homogent lag.

$$T_i - T_e = q \cdot (R_m + R_{si} + R_{se}) \quad \Rightarrow \quad q = \frac{T_i - T_e}{R_{si} + R_m + R_{se}} \quad (2.9)$$

Varmestrømtætheden ønskes bestemt for væggen på Figur 2.3 bestående af parallelle homogene materialeg, der er i så tæt kontakt med hinanden, at temperaturen er den samme på hver side af grænsefladerne.



Figur 2.3: Temperaturvariation for endimensional strømning gennem væg bestående af mere end et homogent lag

Lagene nummereres 1, 2, ..., n og temperaturen i laggrænserne dobbeltindiceret efter de tilgrænsende lag. De foregående formler (2.6) for homogene lag og (2.8) for varmeovergang mellem overflade og luft løses nu med hensyn til temperaturdifferenserne

$$\begin{aligned}
 T_i - T_{si} &= R_{si} q \\
 T_{si} - T_{12} &= \frac{d_1}{\lambda_1} q \\
 T_{12} - T_{23} &= \frac{d_2}{\lambda_2} q \\
 &\dots \\
 T_{n-1,n} - T_{se} &= \frac{d_n}{\lambda_n} q \\
 T_{se} - T_e &= R_{se} q
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Ved addition af disse ligninger udgår alle venstresidernes temperaturer på nær den første og sidste

$$T_i - T_e = q \cdot (R_{se} + \sum R_m + R_{si}) \tag{2.11}$$

Hvis væggen samlede isolans defineres ved

$$R_T = R_{se} + \sum R_m + R_{si} \tag{2.12}$$

kan den samlede varmestrømstæthed da findes af

$$q = \frac{T_i - T_e}{R_T} = U \cdot (T_i - T_e) \quad (2.13)$$

hvor

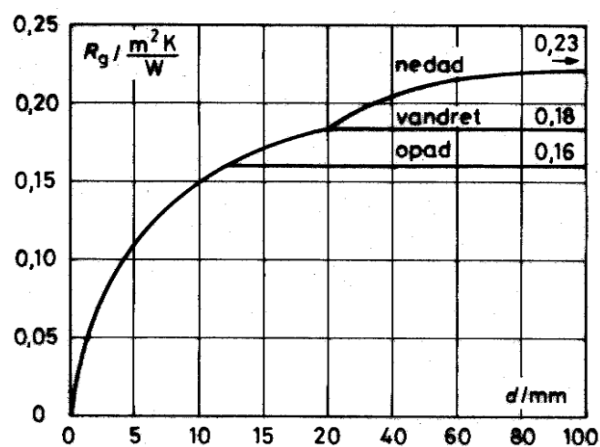
$$U = \frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_{si} + \sum R_m + R_{se}} \quad (2.14)$$

Varmestrømmen gennem hele vægfladen kan bestemmes som

$$\Phi = q \cdot A = U \cdot A \cdot (T_i - T_e) \quad (2.15)$$

Når det dimensionsgivende varmetransmissionstab bestemmes, skal de inden- og udendørs temperaturer være fastlagt. Ifølge Dansk Standard DS418 sættes temperaturerne til  $T_i = 293,15\text{K}$  ( $20^\circ\text{C}$ ) og  $T_e = 261,15\text{K}$  ( $-12^\circ\text{C}$ ), da denne temperaturforskel optræder så sjældent, at resultatet kan betragtes som en bygningsdels dimensionsgivende transmissionstab.

Isolansen af luftlag kan ikke beregnes af den simple formel (2.7), som gælder for faste materialer. Dette skyldes, at luftens stråling og eventuelle konvektion kan være langt væsentligere end varmeledningen. Figur 2.4 viser en lukket luftspaltes isolans  $R_g$  som funktion af spaltetykkelsen jf. Dansk Standard DS418. Grafernes nogenlunde retlinede variation for små lagtykkelser svarer til varmeledning gennem stillestående luft alene, men med voksende lagtykkelse flader graferne ud på grund af bidragene fra først stråling og dernæst den efterhånden initierede konvektion, hvor luften foretager en selv-cirkulation i spalten ved at stige til vejrs ved den varme side og synke ned ved den kolde side, hvorved luftstrømningen medvirker til varmeoverføring mellem fladerne. Dette kan forekomme i ydervægge og i loftkonstruktioner, men ikke så meget i terrændæk, hvor den kolde luft ligger nederst.



Figur 2.4: Isolans af uventileret luftlag som funktion af lagtykkelsen og varmemstrømmens retning. Tallene på graferne er værdien ved lagtykkelsen  $d=300\text{ mm}$

De viste talværdier kan forøges til omtrent det 3-dobbelte, hvis en af eller begge spaltens sider gives en reflekterende beklædning som fx aluminiumsfolie. Det gøres dog sjældent i praksis, da forbedringen af isoleringsevnen er relativ lille i forhold til den samlede isolans, der i dag kræves af en velisoleret klimaskærm. Derudover vil det være vanskeligt at holde den blanke belægning fri for støv og anden tilsmudsning, så den øgede isolans kan udnyttes. For spaltetykkelser større end 0,3 m skal enten isolansen for 0,3 m benyttes ifølge DS418 (vist til højre på graferne), eller der skal foretages en beregning. Hvis luftstrømningen påtrykkes udefra, fx på grund af trykforskel mellem spaltens to ender, karakteriseres dette som en ventileret spalte, og forholdene bliver da noget mere komplicerede. DS418 anbefaler, at der for svagt ventilerede spalter benyttes halvdelen af grafernes værdier. Værdierne kan også findes ved tabelopslag i DS418.

Formlen for den totale isolans udvides herefter med isolansen for luftspalter,  $R_g$ .

$$R_T = R_{si} + \sum R_m + \sum R_g + R_{se} \quad (2.16)$$

Temperaturændringen gennem en lagdelt vægs m'te lag er ifølge (2.10) og (2.13)

$$\Delta T_m = R_m q = R_m \frac{T_i - T_e}{R_T} \quad (2.17)$$

Temperaturændringen gennem lagene er altså proportionale med lagenes isolans, da (2.17) er gældende for alle lag. Temperaturændringen gennem et lag udgør derfor den samme brøkdel af den totale temperaturforskel, som lagets isolans udgør af den samlede isolans. Jo bedre en væg isolerer, jo mindre en del udgør den indvendige overgangsisolans af den samlede isolans og jo mindre bliver temperaturforskellen mellem indendørs luft og indervæg. Ud over at reducere varmetabet, modvirker en god isolering ubehagelig kuldestråling og kuldenedfald fra rummets ydervægge.

Formel (2.17) kan derved benyttes til bestemmelse af temperaturen i alle skilleflader og lagdelinger i konstruktioner. Dette kan have interesse dels for en beregning af den nødvendige fugtisolering til at forhindre kondens i ydervægge og dels til en bestemmelse af lagenes middeltemperatur med henblik på at fastlægge værdien af temperaturafhængige varmeledningsevner, som især er relevant inden for VVS-området, hvor temperaturer og temperaturdifferenser kan være meget høje.

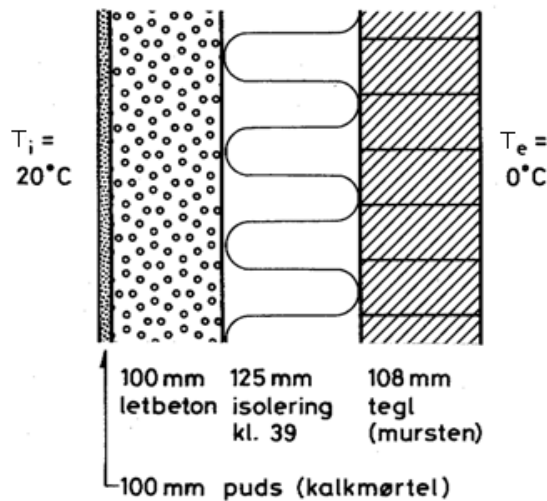
---

### **Eksempel: Isoleret hulmur af tegl og letbeton**

For den viste isolerede hulmur af tegl og letbeton skal beregnes

- 1) Varmetransmissionskoefficienten.
- 2) Temperaturfaldet gennem hvert enkelt materialelag.

3) Varmestrømtætheden gennem væggen.



1. Beregningerne er indført i skemaet og fører i næstsidste søjle til en væmetransmissionskoefficient på 0,25 W/(m²K).

Tabel 2.1: Beregninger for transmissionskoefficient og temperaturfald for hulumuren

Lag	$d$ m	$\lambda$ W/mK	$R_m$ m²K/W	$\Delta T$ K
Indv. overgang			0,13	0,6
Puds (mørtel)	0,010	0,900	0,01	0,0
Letbeton	0,100	0,200	0,50	2,5
Isolering kl. 39	0,125	0,039	3,20	16,0
Udvendig tegl	0,108	0,730	0,14	0,7
Udv. overgang			0,04	0,2
Sum			4,02	20,0
$U = (\sum R)^{-1}$			0,25	

2. Da temperaturfaldene ifølge (2.17) er proportionale med isolanserne, findes temperaturfaldene ved at multiplicere isolanserne med forholdet 20/4,02 W/m² mellem det samlede temperaturfald og den samlede isolans. For isoleringslaget findes:

$$\Delta T = R_m \frac{T_i - T_e}{R_t} = 3,20 \text{ m}^2 \text{K/W} \cdot \frac{293,15 \text{ K} - 273,15 \text{ K}}{4,02 \text{ m}^2 \text{K/W}} = 16,0 \text{ K}$$

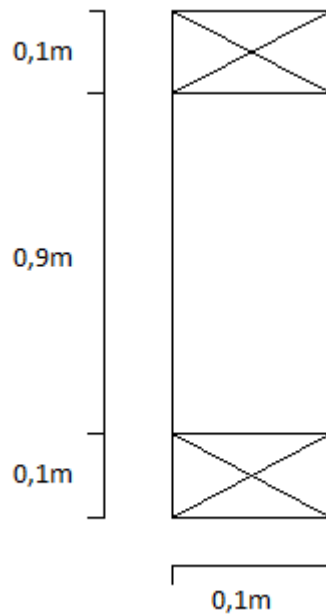
Resultatet i skemaets sidste søjle viser, at 16°C ud af temperaturfaldet på 20°C sker gennem isoleringen, samt at væggens inderside er 0,6°C koldere end den indendørs luft. Den indvendige overgang isolerer næsten lige så godt som teglstenen.

3. Varmestrømtætheden beregnes af (2.13).

$$q = U(t_i - t_e) = 0,25 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} (20^\circ \text{C} - 0^\circ \text{C}) = 5,00 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

### 3. Endimensional varmeledning gennem inhomogene lag

Inhomogene lag er lag, der består af forskellige materialer, når et tværsnit vinkelret på varmestrømmens retning betragtes. Beregning af varmeledning gennem inhomogene lag kan som tilnærmelse foretages på samme måde som gennem homogene lag, når forskellen mellem varmeledningsevnen for de forskellige materialer, ikke er for stor (fx højst en faktor 4 til forskel mellem  $\lambda$ -værdierne). For at forenkle beregningerne ved inhomogene lag benyttes et vægtet gennemsnit af materialernes varmeledningsevne ud fra deres udbredelse målt vinkelret på varmestrømmens retning.



Figur 3.1: Inhomogent lag af træ og mineraluld kl. 39

Figur 3.1 viser et lodret snit gennem et inhomogent lag, der består af isolering og træ. For hver meter konstruktionshøjde er der 0,1 m træ (vandret bjælke) og 0,9 m isolering. Der regnes med, at isoleringen har en varmeledningsevne på  $\lambda = 0,039 \text{ W/mK}$  og træet  $\lambda = 0,12 \text{ W/mK}$ . Det tages som forudsætning, at der ikke er nogle lodrette træbaserede dele, så situationen er den samme i alle snit, der er parallelle med det viste, og at konstruktionen fortsætter over og under det viste snit med samme veksling mellem isolering og træ.

Det vægtede gennemsnit for lagets varmeledningsevne bliver.

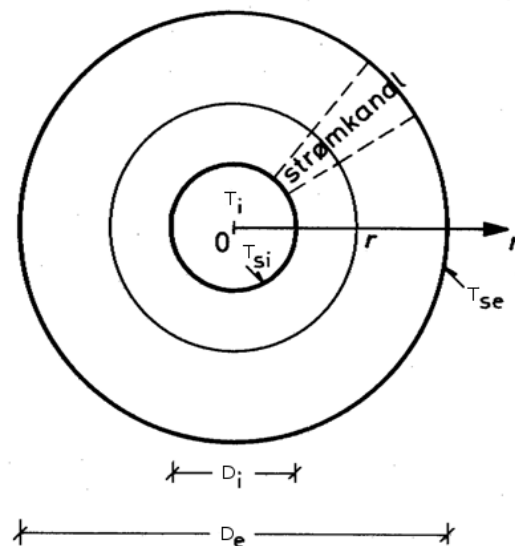
$$\lambda_{iso+træ} = 0,12 \text{ W/mK} \cdot \frac{0,1\text{m}}{1,0\text{m}} + 0,039 \text{ W/mK} \cdot \frac{0,9\text{m}}{1,0\text{m}} = 0,047 \text{ W/mK}$$

#### 4. Endimensional varmeledning gennem rørvægge

Varmetransmissionsberegninger for rørvægge har, ligesom for plane vægge, til formål enten at bestemme varmetabet (evt. koldetabet) ud gennem rørvæggen eller at undersøge temperaturforholdene inde i en rørvæg eller på dens overflader. Nedenfor omtales først de relativt simple beregninger for rørvægge med cirkulærcylindrisk tværsnit og dernæst beregningsmulighederne for andre tværsnit.

Homogene rørvægge forekommer væsentligst når

- Temperaturforskellene er for små til at man benytter isolering.
- Rørene passerer lokaliteter, der kan drage nytte af varmetabet.
- Et enkelt lag i en lagdeling er så isoleringsmæssigt dominerende, at man vælger at se bort fra de øvrige lag



Figur 4.1: Strømningen ud gennem en lang, cirkulærcylindrisk homogen rørkappe sker radiært

Figur 4.1 viser en varmestrømning gennem en cirkulærcylindrisk homogen rørkappe med stor længde, altså et rør. Strømlinjerne gennem rørvæggen er radiære linjer i papirets plan, og varmestrømmen [W/m] bestemmes da af Fouriers lov (2.2) på formen

$$\Phi_l = -\lambda \frac{dT}{dr} A_l \quad (4.1)$$

Index  $l$  betyder lineær, dvs. pr længdeenhed langs rørets akse. Ved radius  $r$  er det lineære gennemstrømmede areal lig med cirkelns omkreds  $A_l = 2\pi r$ , hvorved (4.1) kan omformes til



$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\Phi_l}{\lambda 2\pi r} \quad (4.2)$$

I stationære situationer ændres varmeindholdet ikke i strømningsområdet, og varmestrømmen  $\Phi_l$  er da den samme ud gennem alle cirkler og er dermed uafhængig af  $r$ , så der kan integreres til

$$T = -\frac{\Phi_l}{2\pi\lambda} \ln r + C \quad (4.3)$$

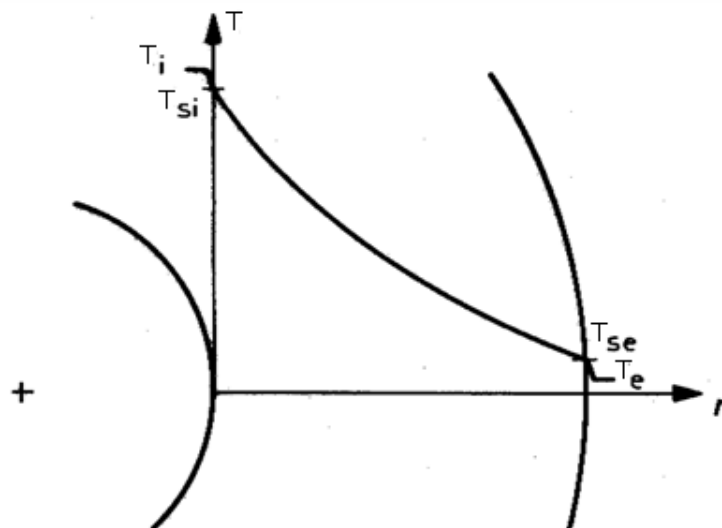
Temperaturen varierer altså logaritmisk med afstanden fra cylinderaksen. For en rørkappe med indvendig og udvendig diameter  $D_i$  og  $D_e$  gælder

$$\begin{aligned} T_{si} &= -\frac{\Phi_l}{2\pi\lambda} \ln \frac{D_i}{2} + C \\ T_{se} &= -\frac{\Phi_l}{2\pi\lambda} \ln \frac{D_e}{2} + C \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ved at trække fx den første af disse formler fra formel (4.3), findes temperaturfordelingen

$$T = T_{si} - \frac{\Phi_l}{2\pi\lambda} \ln \frac{2r}{D_i} \quad (4.5)$$

Varmetransmissionen,  $\Phi_l$ , kan efterfølgende findes af (4.10) og er skitseret på Figur 4.2.



Figur 4.2: Temperaturfordelingen gennem en cirkulærcylindrisk homogen rørkappe er logaritmisk

De to formler (4.4) kan også subtraheres

$$T_{si} - T_{se} = \frac{\Phi}{2\pi\lambda} \ln \frac{D_e}{D_i} \quad (4.6)$$

For indvendig og udvendig varmeovergang gælder med  $\pi D$  som arealet pr. længdeenhed rør

$$\begin{aligned} \Phi_l &= h_i(T_i - T_{si})\pi D_i \\ \Phi_l &= h_e(T_{se} - T_e)\pi D_e \end{aligned} \quad (4.7)$$

Af (4.7) findes

$$\begin{aligned} T_i - T_{si} &= \frac{\Phi_l}{h_i\pi D_i} \\ T_{se} - T_e &= \frac{\Phi_l}{h_e\pi D_e} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ligningerne i (4.8) adderes med (4.6)

$$T_i - T_e = \frac{\Phi_l}{\pi} \left[ \frac{1}{h_i D_i} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{D_e}{D_i} + \frac{1}{h_e D_e} \right] \quad (4.9)$$

Varmetransmissionen kan bestemmes til

$$\Phi_l = U_{cyl}(T_i - T_e) \quad (4.10)$$

Hvor varmetransmissionskoefficienten for cylinderen bestemmes ved

$$U_{cyl} = \frac{\pi}{\frac{1}{h_i D_i} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{D_e}{D_i} + \frac{1}{h_e D_e}} \quad (4.11)$$

Resultatet (4.10) og (4.11) ligner det tilsvarende resultat for ensrettet varmetransmission gennem en plan væg, men der er to væsentlige forskelle:  $\Phi_l$  er effekten pr. længdeenhed rør med enheden W/m, og formelen for  $\Phi_l$  mangler et gennemstrømningsareal  $A$  på højresiden, da et sådant ikke er naturligt at indføre. Derfor bliver  $U_{cyl}$  heller ikke en normal transmissionskoefficient, men får enheden W/(m·K).

Rørets indvendige og udvendige overfladetemperaturer  $T_{si}$  og  $T_{se}$  bestemmes af formlerne (4.8).

Den indvendige overgangskoefficient  $h_i$  skyldes konvektion mellem rørvæggen og den strømmende luft eller væske, idet der ikke er strålingsbidrag, når hele indervæggen har samme temperatur. Til overslagsberegninger kan man benytte formelen

$$h_i = 3,7 \left[ \frac{W s^{0,8}}{m^{2,6} K} \right] \cdot \frac{u_m^{0,8}}{D_i^{0,2}} \quad (4.12)$$

Hvor  $u_m$  er middelhastigheden. Med  $u_m$  [m/s] og  $D_i$  [m] findes  $h_i$  [W/m<sup>2</sup>K].

Selvom den indvendige overgangsisolans kun har beskeden betydning ved luftstrømninger medregnes den ofte, hvorimod den er helt uvæsentlig ved vandstrømninger, hvor faktoren 3,7 skal erstattes af ca. 2000, hvorved isolansen bliver meget lille. Hvis materialelagets isolans samtidig er lille, vil den væsentligste varmemodstand ligge på den udvendige overgangsisolans.

Den udvendige overgangsisolans er sammensat med et bidrag,  $h_k$ , fra konvektion og et bidrag,  $h_s$ , fra stråling. Hvis røret er placeret indendørs kan der regnes med naturlig konvektion, hvilket giver følgende tilnærmede formel for vandrette rør.

$$h_e = h_k + h_s = 1,1 \left( \frac{T_{se} - T_e}{D_e} \right)^{\frac{1}{4}} + \varepsilon \cdot \left( 4,7 + \frac{T_{se} + T_e}{40} \right) \quad (4.13)$$

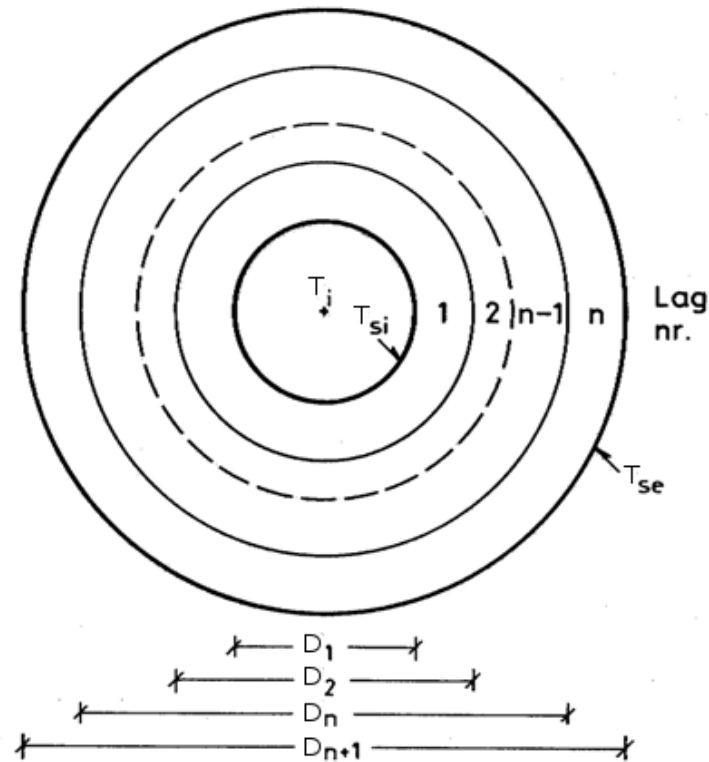
Overfladens emissivitet  $\varepsilon$  er forholdet mellem strålingen fra den givne flade og fra en absolut sort flade. For de fleste ikke-metaller og for emaljelak på metaller kan emissiviteten sættes til 0,9. For metaller benyttes forskellige emissiviteter alt efter metallens overflade, så derfor kan der benyttes 0,75 for oxyderet stål, 0,25 for nyt galvaniseret stål, 0,1 for oxyderet aluminium og 0,05 for blankt aluminium. For aluminiumsfarve og plast kan regnes med 0,4. Det kan læses mere om bygningsmaterialers emissiviteter i Tabel 12.1 På grund af metaloverfladers lave emissivitet, giver det lave værdier af  $h_e$ , hvilket forbedrer rørvæggens isolans og hæver overfladetemperaturen  $T_{se}$ . Formel (4.13) giver typisk værdier på  $h_e = 4-8$  W/m<sup>2</sup>K, mindst for metaloverflader. Da  $T_{se}$  ikke kendes på forhånd, må den skønnes, hvorefter  $h_e$  beregnes af (4.13),  $U_{cyl}$  af (4.11),  $\Phi_l$  af (4.10) og endelig beregnes  $T_{se}$  af den sidste af ligningerne (4.8). Stemmer den beregnede  $T_{se}$  ikke overens med den skønnede, benyttes det som skøn i en ny gennemregning, og der itereres til det skønnede og det beregnede stemmer overens.

Et interessant sideresultat fås af (4.11) ved at kalde vægtykkelsen  $s$  og indsætte  $D_e = D_i + 2s$

$$U_{cyl} = \frac{\pi}{\frac{1}{h_i D_i} + \frac{1}{2\lambda} \ln \left( 1 + \frac{2s}{D_i} \right) + \frac{1}{h_e (D_i + 2s)}} \quad (4.14)$$

Holdes vægtykkelsen  $s$  fast og lades  $D_i$  gennemløbe aftagende værdier, vil alle 3 summationsled i (4.14) vokse, så  $U_{cyl}$  derved aftager. Små rør har altså mindre varmetab samt mindre materialforbrug end store rør for en given vægtykkelse. Argumentet kan føres videre til lagdelte rørvægge, hvor det giver mindst

varmetab at placere de bedst isolerende (og normalt også dyreste) lag nærmest røraksen, hvis det ellers er muligt. Endvidere vil en forøgelse af et isoleringslag give mindre og mindre forøgelse af isolansen målt i forhold til materialforbruget.



Figur 4.3: Cirkulærcylindrisk rørkappe sammensat af n homogene lag

Herefter betragtes varmestrømningen gennem en lagdelt rørvæg. Som vist på Figur 4.3 indekseres de enkelte lags egenskaber (inklusive indvendig diameter) 1, 2, ..., n indefra, og yderste lags udvendige diameter kaldes  $D_{n+1}$ . Temperaturændringen gennem hvert enkelt lag fås nu af (4.6) og gennem den indvendige og udvendige overgang af (4.8). Efter samme princip som i det foregående udvides (4.11) herved til

$$U_{cyl} = \frac{\pi}{\frac{1}{h_i D_i} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\lambda_j} \ln \frac{D_{j+1}}{D_j} + \frac{1}{h_e D_{n+1}}} \quad (4.15)$$

Temperaturændringerne gennem de enkelte lag og gennem den udvendige og indvendige overgang er proportionale med de tilsvarende led i brøkenes nævner, hvorved temperaturerne i rørkappens laggrænser let kan beregnes. Disse temperaturer kan have interesse af mange grunde:

- Lagenes varmeledningsevner afhænger af temperaturen

- Den udvendige overgangsisolans afhænger af temperaturforskellen mellem overflade og rumluft
- De benyttede materialer virker mindre effektivt eller kan nedbrydes af varmen
- Overfladetemperaturen af kolde rør skal holdes over rumluftens dugpunkt for at modvirke uønsket kondensdannelse

Desuden gælder inden for VVS-området, hvor man arbejder med temperaturer fra -20°C til 1500°C

- Det optimale isoleringsmateriale afhænger af lagets temperaturniveau
- Røroverfladen skal være berøringssikker
- Kolde rør skal være frostbeskyttede

Det er ofte nødvendigt at løse varmetransmissionsproblemer iterativt ved at skønne temperaturen af den indvendige og udvendige overflade og ud fra dette at fastlægge overgangskoefficienterne, samt eventuelt at skønne grænsefladernes temperaturer for at kunne fastlægge lagenes varmeledningsevne. Hvis beregningens slutresultat udviser for store afvigelser fra de skønnede værdier, kan det benyttes til fastsættelse af forbedrede skøn for en ny gennemregning.

Dette gør sig gældende for cirkulære rør. For andre former af rørtværsnittet er det nødvendigt med en mere omstændelig todimensional beregning, som ikke gennemgås i dette notat. Det bør bemærkes, at ved rørtværsnit, der er rektangulære eller på anden måde sammensat af plane flader, kan formlerne for plane vægge benyttes. Her kan der imidlertid være problemer ved fladernes kanter, hvor der så må medregnes et ekstra transmissionstab for hjørnet beregnet som et linjetab. Ved tynde vægge eller vægge med høj varmeledningsevne er det dog en udmærket tilnærmelse kun at beregne på de plane flader, da en stor del af rørvæggens isolans vil være den ydre overgangsisolans.

Varmetransmission gennem kugleskaller kan behandles tilsvarende cylinderskaller, men resultatet angives her uden udledning.

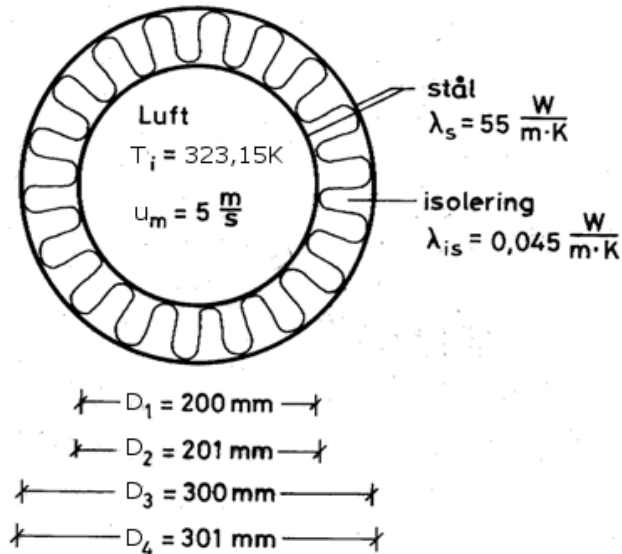
$$\Phi_l = U_{kug} (T_i - T_e) \quad (4.16)$$

med

$$U_{kug} = \frac{\pi}{\frac{1}{h_i D_i^2} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\lambda_j} \left( \frac{1}{D_j} - \frac{1}{D_{j+1}} \right) + \frac{1}{h_e D_{n+1}^2}} \quad (4.17)$$

### Eksempel: Isoleret ventilationskanal

Figuren viser en ventilationskanal bestående af 2 stålkapper med tykkelse 0,5 mm og en mellemliggende mineraluldsmåtte med tykkelse 50 mm. Kanalen transporterer luft ved 323,15K (50°C) og med middelhastigheden 5 m/s. Varmeledningsevnen for mineralulden er fastsat under hensyntagen til det forhøjede temperaturniveau. Varmetabet gennem 1 meter rørvæg skal beregnes for rumtemperaturen 283,15K (10°C).



Den indvendige varmeovergangskoefficient  $h_i$  beregnes af (4.12).

$$h_i = 3,7 \left[ \frac{Ws^{0,8}}{m^{2,6}K} \right] \cdot \frac{u_m^{0,8}}{D_i^{0,2}} = 3,7 \left[ \frac{Ws^{0,8}}{m^{2,6}K} \right] \cdot \frac{(5,00m/s)^{0,8}}{(0,200m)^{0,2}} = 18,5 \frac{W}{m^2K}$$

Den udvendige varmeovergangskoefficient beregnes af (4.13), idet kanalens overfladetemperatur skønnes til 287,15K og stålets emissivitet til  $\varepsilon = 0,75$  (oxyderet).

$$h_e = 1,1 \left( \frac{T_{se} - T_e}{D_e} \right)^{\frac{1}{4}} + \varepsilon \cdot \left( 4,7 + \frac{T_{se} + T_e}{40} \right) = 1,1 \cdot \left( \frac{14 - 10}{0,301} \right)^{\frac{1}{4}} + 0,75 \cdot \left( 4,7 + \frac{14 + 10}{40} \right)$$

$$h_e = 2,1 \frac{W}{m^2K} + 4,0 \frac{W}{m^2K} = 6,1 \frac{W}{m^2K}$$

Transmissionskoefficienten beregnes af (4.15)

$$U_{cyl} = \left[ \frac{\pi}{\frac{1}{18,5 \cdot 0,200} + \frac{1}{6,1 \cdot 0,301} + \frac{1}{2,55} \ln \frac{0,201}{0,200} + \frac{1}{2 \cdot 0,045} \ln \frac{0,300}{0,201} + \frac{1}{2,55} \ln \frac{0,301}{0,300}} \right] \frac{W}{mK}$$

$$U_{cyl} = \left[ \frac{\pi}{0,27 + 0,55 + 5 \cdot 10^{-5} + 4,45 + 3 \cdot 10^{-5}} \right] \frac{W}{mK} = 0,60 \frac{W}{mK}$$

(4.18)

Herefter giver (4.10) det søgte varmetab

$$\Phi_l = 0,60 \frac{\text{W}}{\text{mK}} \cdot (323\text{K} - 283\text{K}) = 24 \frac{\text{W}}{\text{m}} \quad (4.19)$$

Beregningerne viser at stålets isolans er betydningsløst i forhold til den indvendige og udvendige overgang, som giver et bidrag på 0,27 + 0,55, det vil sige 16% ud af summen på 5,27. For et 300 mm uisolaret stålrør, hvor hele varmemodstanden ligger på overgangsisolanserne, er det samlede varmetab ca. 6 gange så stort.

Temperaturændringen ved den udvendige varmeovergang bliver

$$\Delta T_e = \frac{0,55}{5,27} (323\text{K} - 283\text{K}) = 4,2\text{K} \quad (4.20)$$

Da dette svarer nogenlunde til den skønnede forskel på 4 K, er omregning af  $h_e$  ikke nødvendig.

---







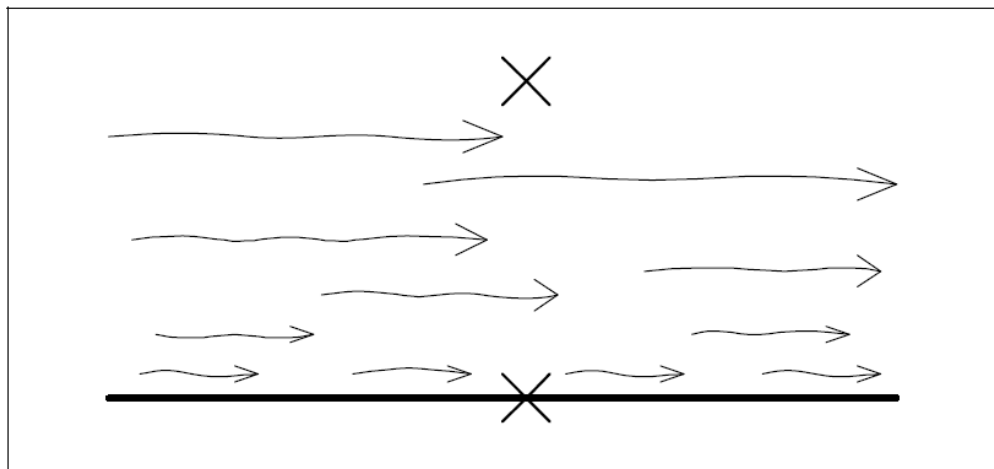
## 5. Konvektion

Konvektion betyder medføring ved strømning af et fluid, dvs. en luftart eller væske. Konvektiv varmetransport er således overføring af varme pga. en luftart eller væske, der kan medføre varmen fra et varmt til et koldt område, hvor imellem det pågældende fluid bevæger sig. Dvs. hvis der står en meget varm radiator i et koldt rum, vil der opstå konvektion mellem den varme radiator og den kolde luft.

I alle fluidet, der bevæger sig, finder der en samtidig varmeledning sted i selve fluidet. Denne varmeledning er som regel lille i forhold til den samlede varmeoverførsel og er indeholdt i begrebet "konvektion".

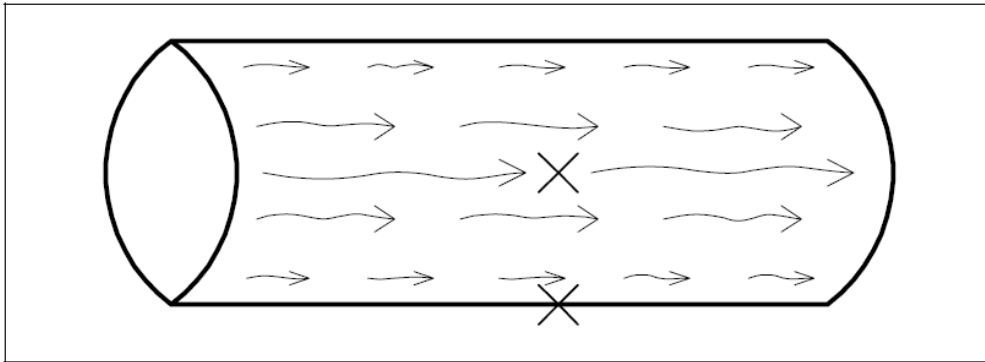
For de bygningsenergitekniske anvendelser finder konvektiv varmeoverføring typisk sted i følgende tilfælde (se også figurerne Figur 5.1 til Figur 5.4).

1. Ved luftens *strømning hen over* en plan flade som fx en bygningsoverflade. Varmen overføres fra selve overfladen til "et sted, der er tilstrækkeligt langt ude i den omgivende luft til at være upåvirket af fladen", se Figur 5.1.



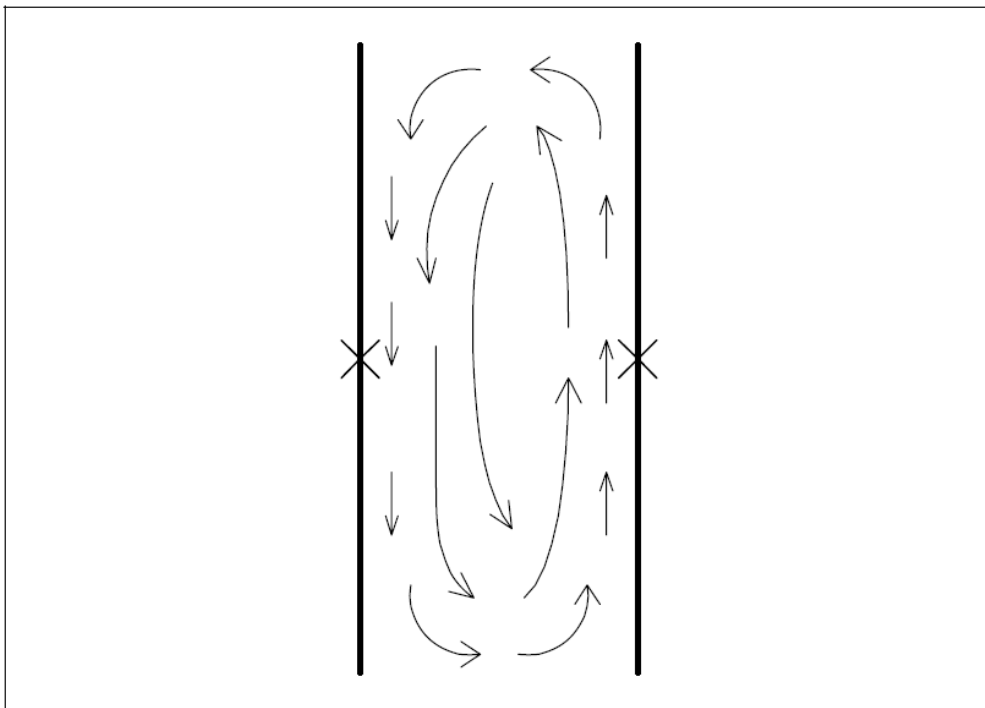
Figur 5.1: Konvektion hen over en plan flade. Krydsene markerer de punkter, hvor varmeoverføringen ønskes bestemt imellem

2. Ved *strømning indvendigt i rør* (som regel væske) eller kanaler (som regel luft). Den konvektive varmetransport overfører varmen mellem kanal/rør-væggen og fluidet, se Figur 5.2.



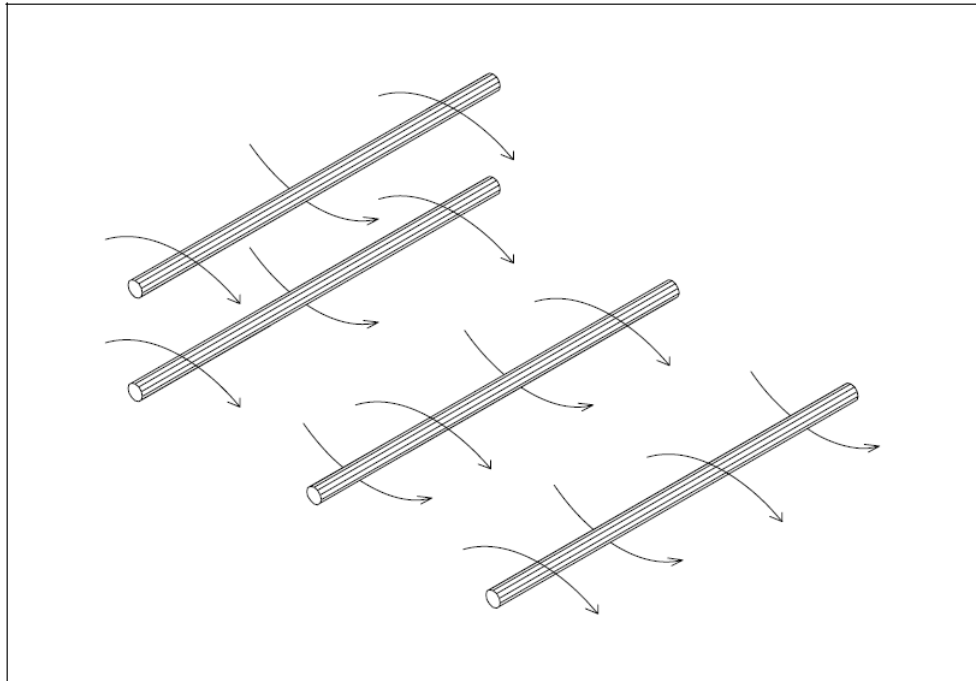
Figur 5.2: Konvektion indvendigt i rør eller kanaler

3. Ved *strømning mellem* to parallelle flader, der adskilles fra hinanden af et luftlag eller evt. af væske. Et eksempel er luftrummet mellem to lag glas i en rude, se Figur 5.3.



Figur 5.3: Konvektion i lukkede hulrum mellem to parallelle flader

4. Et særligt tilfælde af 1 (*strømning hen over*) er et fluids strømning hen over ydersiden af et rør eller en kanal, eller bundter af fx rør. Dette finder man typisk i varmtvandsbeholdere, hvor der finder varmeoverføring sted mellem en beholdervæske og forsyningsrør, der snor sig gennem beholderen, se Figur 5.4.



Figur 5.4: Konvektion på ydersiden af rør eller kanaler

Der skelnes mellem to former for konvektion, hvor styrken til at overføre varme igen afhænger af hvilken af to strømningstyper, der er gældende.

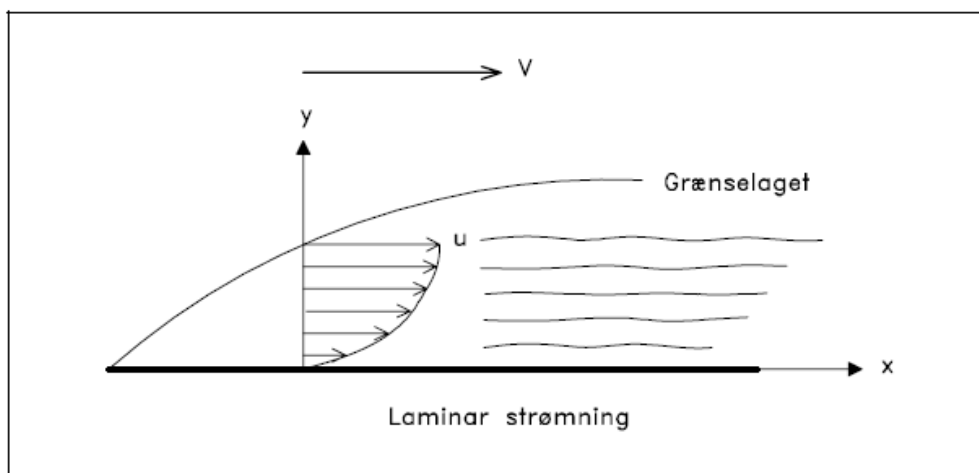
De to former for konvektion er:

- *Tvungen konvektion*, hvor fluidets bevægelse skyldes udefrakommende kræfter, fx en ventilator, en pumpe eller vinden. Denne form for konvektion finder typisk sted i kanaler og rør samt ved udendørs bygningsoverflader.
- *Naturlig, eller fri, konvektion*, hvor fluidets bevægelse skyldes temperaturforskelle, der forårsager forskelle i massefylde. De lette (som regel varme) dele af fluidet presses op af de tunge (som regel koldere) dele, der falder ned drevet af tyngdekraften. Denne form for konvektion finder fx sted mellem to parallelle flader, hvor mellemrummet ikke på anden måde er ventileret til det fri, samt ved indvendige bygningsoverflader. Hvis der forekommer tvungen konvektion, vil den hurtigt dominere over den fri konvektion.

De to hovedstrømningstyper, som findes ved både tvungen og fri konvektion, er, se Figur 5.5 og Figur 5.6:

- *Laminar strømning*. Helt inde ved den bestrøgne overflade står fluidet stille. Herover flyder fluidets molekyler roligt som molekylelag, hvis bevægelser er parallelle med den bestrøgne overflade. Molekylelagenes hastighed udvikler sig i et krumt forløb med

afstanden fra overfladen, indtil hastigheden et stykke ude når den *fri strømnings*hastighed. Hastighedsprofilet udvikles fra væggen som et såkaldt Blasius-profil, hvis eksakte løsning ikke kan opskrives som et simpelt formeludtryk, men kan tilnærmes som for eksempel et polynomium (se fx Pits & Sissom, 1977). Området fra den bestrøgne overflade ud til der, hvor fluidet tilnærmelsesvist har den fri strømningshastighed, betegnes *grænselaget*. Strømningsprofilet i grænselaget er uafhængigt af den bestrøgne overflades karakter, fx ruhed, idet modstanden ligger i fluidet mellem dets molekylelag. Temperaturen følger et lignende profil: Længst inde har fluidet overfladens temperatur, og temperaturen ændres udad i et krumt forløb til temperaturen af den uforstyrrede strømning nås. Temperaturen udvikles altså indenfor et termisk grænselag. Afstanden ud til den uforstyrrede strømningstemperatur er ikke nødvendigvis den samme som strømningens grænselagstykkelse. Det termiske grænselag er ligedannet med strømningsgrænselaget, men kan altså have en anden tykkelse. Da strømmingen er rolig og helt overvejende parallel med overfladen, er den konvektive varmeoverførsel kun lidt større end ved ren varmeledning i fluidet mellem overfladen og det fri strømningsfelt.

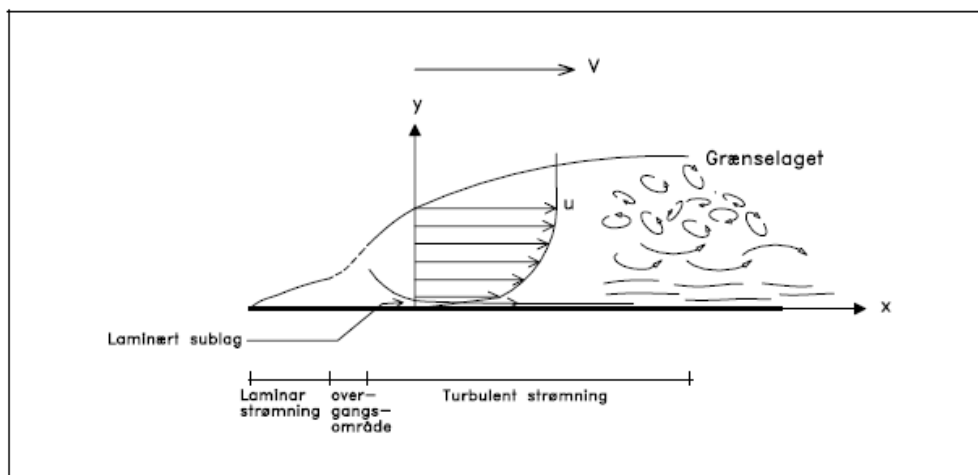


Figur 5.5: Grænselag ved laminar strømning hen over en plan flade

- *Turbulent strømning.* Når hastigheden er stor, er strømmingen meget mere urolig, og i strømmingen findes der talrige små fluktuationer sted, som går på tværs af den bestrøgne overflade. I ethvert punkt og i alle retninger ændres hastigheden løbende. Strømmingens hastighed er stadig nul helt inde ved den bestrøgne overflade, men den udvikles hurtigt væk fra overfladen. Helt inde ved overfladen findes dog et laminart sublag, hvor hastigheden og temperaturen udvikles lineært. Udenfor det laminare sublag udvikles hastigheden tilnærmelsesvis med logaritmen til afstanden fra væggen.

Tilsvarende har temperaturprofilen en hurtig udvikling væk fra overfladen, hvor fluidet har overfladens temperatur ud til den afstand, hvor det fri strømningsfelts temperatur opnås. Ved turbulent strømning spiller det en væsentlig rolle for strømningsprofilen og varmeoverføringen, hvilken ruhed den bestrøgne overflade har. På grund af det stejle temperaturprofil og fluidets bevægelser, der også går vinkelret på overfladen, er varmeoverføringen større ved den turbulente strømning end ved den laminare.

Ved strømning hen over en plan flade starter strømningen med at være laminar før den overgår til at blive turbulent længere henne ad fladen i strømningsretning, se Figur 5.6. Da strømningen ikke ændrer karakter helt pludseligt, er der tale om, at strømningen først skal passere et overgangsområde, før den turbulente strømning er fuldt udviklet. Afstanden fra fladens forkant til der, hvor den fuldt udviklede turbulente strømning opnås, betegnes den *kritiske længde*,  $l_k$ .



Figur 5.6: Grænselaget ved overgang fra laminar til turbulent strømning

Uanset konvektionsform, strømningstype og anvendelse ønsker man at nå frem til at kunne beskrive varmeoverføring efter følgende simple ligning:

$$\Phi = A \cdot h_K \cdot \Delta T \quad (5.1)$$

I stedet for det konvektive varmeovergangskoefficient,  $h_K$ , i ligning (5.1) kan den konvektive overgangsisolans,  $R_K$ , benyttes.

$$R_K = \frac{1}{h_K} \quad (5.2)$$

Desværre er det ikke helt så simpelt at bestemme den konvektive varmeovergangskoefficient. Det kan kun vanskeligt eller slet ikke lade sig gøre ad rent teoretiske overvejelser, eller ved avancerede CFD-beregninger (Computational Fluid Dynamics), så i stedet benytter man sig af eksperimentelt

fundne resultater, der systematiseres på en sådan måde, at de ved indpasning i nogle empirisk bestemte formeludtryk kan dække en række typisk forekommende tilfælde. Som et led i systematiseringen indføres nogle dimensionsløse modeltal.

For at bringe et konkret forekommende strømningstilfælde i system, kan det være en fordel at finde dets plads i nedenstående tabel. Ikke alle de nævnte eksempler i denne tabel vil blive gennemgået videre i dette notat, ligesom der selvfølgelig kan tænkes mere specielle situationer end de i tabellen nævnte.

**Tabel 5.1: Typiske strømningstilfælde. Ved naturlig konvektion skelnes endvidere mellem om en varmegiver har konstant temperatur eller afgiver en konstant effekt**

	Laminar	Turbulent
<b>Tvungen konvektion</b>	<i>Udvendig strømning</i>	<i>Udvendig strømning</i>
	– Hen over plan flade	– Hen over plan flade
	– Hen over rør/rørbundter	– Hen over rør/rørbundter
	– Hen over kugle	– Hen over kugle
	<i>Indvendig strømning</i>	<i>Indvendig strømning</i>
	– I rør eller kanal	– I rør eller kanal
<b>Naturlig (fri) konvektion</b>	<i>Udvendig strømning</i>	<i>Udvendig strømning</i>
	– Ved lodret flade	– Ved lodret flade
	– Ved vandret flade, $\Phi$ nedad	– Ved vandret flade, $\Phi$ nedad
	– Ved vandret flade, $\Phi$ opad	– Ved vandret flade, $\Phi$ opad
	– Ved vandret rør	– Ved vandret rør
	– Ved lodret rør	– Ved lodret rør
	– Ved kugle	– Ved kugle
	<i>Indvendig strømning</i>	<i>Indvendig strømning</i>
	– Mellem to parallelle, lodrette flader	– Mellem to parallelle, lodrette flader
	– Mellem to parallelle, vandrette flader, $\Phi$ nedad	– Mellem to parallelle, vandrette flader, $\Phi$ nedad
	– Mellem to parallelle vandrette flader, $\Phi$ opad	– Mellem to parallelle vandrette flader, $\Phi$ opad
	– Mellem to parallelle skrå flader	– Mellem to parallelle skrå flader

## 6. Konvektive modeltal

### 6.1 Reynolds tal

Reynolds tal bruges til at bestemme, om strømningen er laminar eller turbulent. Det er blandt andet hastigheden,  $u$ , af fluidets strømning, der er afgørende for, om strømningen er laminar eller turbulent, men fluidets viskositet,  $\nu$ , spiller også

ind, altså hvor "tyktflydende" fluidet er, og den karakteristiske længde,  $L$ , som beskriver hvilke dimensioner den omkringliggende geometri har. Det har vist sig hensigtsmæssigt at samle disse forhold i ét dimensionsløst tal: *Reynolds tal*,  $Re$ .

$$Re = \frac{u \cdot L}{\nu} \quad (6.1)$$

For strømning hen over en plade er der konvention for at vælge pladens længde som karakteristisk længde, og hastigheden tages som hastigheden i det fri strømningsfelt. Overgangen fra laminar til turbulent strømning kan regnes at finde sted, når  $Re$  er mellem 300.000 og 500.000.

Ved strømning i cylindriske rør benyttes rørets diameter som karakteristisk længde og hastigheden er strømningens middelhastighed over rørets tværsnit. For andre geometrier end cylindriske rør, fx kanaler, benyttes den *hydrauliske diameter* som karakteristisk længde. Den hydrauliske diameter er fire gange tværsnitsarealet divideret med omkredsen af røret/kanalen (for et cylindrisk rør er dette netop lig rørdiameteren). Strømningen er turbulent, når  $Re$  er større end ca. 2300.

Et fluids kinematiske viskositet er lig med dets såkaldte dynamiske viskositet  $\mu$  divideret med dets massefylde. Viskositeter for luft og vand kan aflæses af Tabel 6.1 og Tabel 6.2.

**Tabel 6.1: Densitet ( $\rho$ ), varmeledningsevne ( $\lambda$ ), dynamisk viskositet ( $\mu$ ), kinematisk viskositet ( $\nu$ ) og Prandtl-tal ( $Pr$ ) for vand ved forskellige temperaturer. Der kan interpoleres i tabellen**

Temperatur [°C]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\lambda$ [W/(mK)]	$\mu$ [kg/(m·s)]	$\nu$ [m <sup>2</sup> /s]	$Pr$ [-]
0	999,8	0,552	$1,792 \cdot 10^{-3}$	$1,792 \cdot 10^{-6}$	13,67
20	998,2	0,598	$1,002 \cdot 10^{-3}$	$1,004 \cdot 10^{-6}$	7,01
40	992,2	0,628	$0,657 \cdot 10^{-3}$	$0,658 \cdot 10^{-6}$	4,34
60	983,2	0,651	$0,466 \cdot 10^{-3}$	$0,474 \cdot 10^{-6}$	2,99
80	971,8	0,669	$0,355 \cdot 10^{-3}$	$0,365 \cdot 10^{-6}$	2,23

**Tabel 6.2: Densitet ( $\rho$ ), varmeledningsevne ( $\lambda$ ), dynamisk viskositet ( $\mu$ ), kinematisk viskositet ( $\nu$ ) og Prandtl-tal ( $Pr$ ) for luft ved forskellige temperaturer. Der kan interpoleres i tabellen.**

Temperatur [°C]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\lambda$ [W/(mK)]	$\mu$ [kg/(m·s)]	$\nu$ [m <sup>2</sup> /s]	$Pr$ [-]
0	1,293	0,0243	$1,720 \cdot 10^{-5}$	$1,330 \cdot 10^{-5}$	0,715
20	1,205	0,0257	$1,821 \cdot 10^{-5}$	$1,511 \cdot 10^{-5}$	0,713
40	1,127	0,0271	$1,913 \cdot 10^{-5}$	$1,697 \cdot 10^{-5}$	0,711
60	1,060	0,0285	$2,003 \cdot 10^{-5}$	$1,890 \cdot 10^{-5}$	0,709
80	1,000	0,0299	$2,094 \cdot 10^{-5}$	$2,094 \cdot 10^{-5}$	0,708



## 6.2 Nusselt-tallet

Den konvektive varmeovergangskoefficient,  $h$ , som blev anvendt i (5.2) gælder helt specifikt for en aktuel geometri og et bestemt fluid. En måde at generalisere denne størrelse, er ved at indføre et *Nusselt-tal*,  $Nu$ :

$$Nu = \frac{h_K \cdot L}{\lambda} \quad (6.2)$$

Nusselt-tallet skal simpelthen opfattes som en dimensionsløs varmeovergangskoefficient for konvektion. Når  $Nu$ -tallet er kendt, kan den konvektive varmeovergangskoefficient, og dermed den konvektive varmeoverføring, bestemmes.

Der findes en række empiriske formeludtryk, der giver Nusselt-tallet for en række typiske forekommende tilfælde fra den tekniske verden. For at bruge disse udtryk skal yderligere et par andre dimensionsløse størrelser kendes.

## 6.3 Prandtl-tallet

*Prandtl-tallet* udtrykker et fluids evne til at overføre bevægelse igennem sig ved viskose kræfter i forhold til dets evne til at føre en varmemstrøm igennem ved ledning. Dette udtrykkes som fluidets kinematiske viskositet,  $\nu$ , divideret med dets termiske diffusivitet,  $a$ .

Den termiske diffusivitet for et materiale kan bestemmes som dets varmeledningsevne divideret med dets volumenspecifikke varmekapacitet, som er densiteten,  $\rho$ , ganget med den specifikke varmekapacitet,  $c_p$ .

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad (6.3)$$

Prandtl-tallet kan bestemmes ud fra en af følgende sammenhænge:

$$Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\nu \rho c_p}{\lambda} = \frac{\mu c_p}{\lambda} \quad (6.4)$$

Prandtl-tallet er en materialeegenskab ved fluidet. For vand er  $Pr$ -tallet ret temperaturafhængigt og kan findes af Tabel 6.1. For luft og mange andre gasser er  $Pr$ -tallet tæt på 0,7 og ikke særlig temperaturafhængigt, se Tabel 6.2.

I en række typiske tilfælde for tvungen konvektion, har  $Nu$ -tallet bestemt efter følgende generelle udtryk - eller nogle der ligner:

$$Nu = C \cdot Re^{c_1} \cdot Pr^{c_2} \quad (6.5)$$

## 6.4 Grashof-tallet

Ved naturlig konvektion bruges et dimensionsløst tal, der siger noget om opdriftskræfterne i forhold til de viskose kræfter i fluidet. Et sådant tal er *Grashof*-

tallet,  $Gr$ , som bl.a. findes ud fra tyngdeaccelerationen,  $g$ , den karakteristiske længde,  $L$ , og den termiske udvidelseskoefficient,  $\beta$ .

$$Gr = \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot L^3}{\nu^2} \quad (6.6)$$

Den termiske udvidelseskoefficient kan for en idealgas bestemmes som:

$$\beta = \frac{1}{T} \quad (6.7)$$

### 6.5 Rayleigh-tallet

Undertiden bruges et *Rayleigh-tal*,  $Ra$ , der er produktet af Prandtl-tallet og Grashof-tallet:

$$Ra = Gr \cdot Pr \quad (6.8)$$

Ved naturlig konvektion bestemmes  $Nu$ -tallet hyppigt ud fra udtryk af formen:

$$Nu = C \cdot (Gr \cdot Pr)^{c_1} = C \cdot Ra^{c_1} \quad (6.9)$$

### 6.6 Særlige betingelser for bestemmelse af modeltallene

Det er vigtigt at være opmærksom op, at der findes forskellige empiriske udtryk, alt efter om det er  $Nu$ -tallet et lokalt sted på fladen eller middelværdien for hele fladen, der ønskes bestemt. De forskellige tilfældes indiceres på  $Nu$ -tallet, hvor  $Nu_x$  betegner det lokale  $Nu$ -tal for et bestemt sted,  $x$ , langs en flade, der bestryges af det strømmende fluid, mens  $Nu_L$  betegner det samlede  $Nu$ -tal for hele flade, eller middelværdien for hele fladen, der også kan angives som  $\overline{Nu}$ . Ved indsættelse i udtryk som (6.5) eller (6.9), skal der være konsistens i brugen af den karakteristiske længde, således at den længde, der indgår i  $Re$ -tallet eller  $Gr$ -tallet skal være den samme, som den  $Nu$ -tallet refererer til.

Ofte indgår der størrelser i beregningerne, som er temperaturafhængige, og der ikke er angivet en specifik temperatur, er det kutyme at bestemme de pågældende egenskaber ved gennemsnitstemperaturen for den bestrøgne overflade og den fri strømning. Dette gør sig især gældende ved den kinematiske viskositet i  $Re$ -tallet og  $Gr$ -tallet, mens også ved bestemmelse af  $Pr$ -tallet, som varierer kraftigt for vand afhængig af temperaturen.

## 7. Typiske konvektionstilfælde

### 7.1 Strømning hen over plane flader

#### 7.1.1 Tvungen laminar strømning

Ved strømning hen over en plan flade med lave hastigheder, er strømmingen laminar ( $Re < 300.000$ ), og der kan regnes med følgende udtryk for det lokale  $Nu$ -tal afstanden  $x$  henne ad fladen målt fra forkanten:

$$Nu_x = 0,332 \cdot Re_x^{\frac{1}{2}} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \quad (7.1)$$

For samme strømning bliver middelværdien af  $Nu$ -tallet over hele fladen:

$$\overline{Nu} = 0,664 \cdot Re_L^{\frac{1}{2}} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \quad (7.2)$$

Middelværdien  $Nu$ -tallet bestemt ved afstanden  $L$  fra forkanten er altså dobbelt så stor, som  $Nu$ -tallet et lokalt sted på fladen.

Ligning (7.1) og (7.2) gælder for  $Pr$  større end 0,5. Udtrykkene i ligningerne (7.1) og (7.2) er udledt ad analytisk vej og siden hen verificeret eksperimentelt.

#### 7.1.2 Tvungen turbulent strømning

Når strømmingen sker med større hastighed, så den er turbulent ( $Re > 500.000$ ), gælder et andet udtryk for det lokale  $Nu$ -tal:

$$Nu_x = 0,029 \cdot Re_x^{0,8} \cdot Pr^{0,43} \quad (7.3)$$

Denne formel kan bruges for  $Pr$ -tal i intervallet 0,7 - 400, og  $Re$ -tal i intervallet 500.000 - 30.000.000.

Middelværdien af  $Nu$ -tallet over hele fladen bliver:

$$\overline{Nu} = 0,036 \cdot Re_L^{0,8} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} - 836 Pr^{\frac{1}{3}} \quad (7.4)$$

Denne formel tager hensyn til, at strømmingen først er turbulent i området efter den kritiske længde, og at varmeovergangen gennemgående er mindre i det laminare område.

#### 7.1.3 Naturlig konvektion, konstant fladetemperatur

Dette omfatter for eksempel naturlig konvektion fra bygnings-, beholder- og solfangeroverflader, idet disse (tilnærmelsesvist) har samme temperatur over hele fladen.

Først skal  $Gr$ -tallet bestemmes af (6.6) og  $Pr$ -tallet findes for det pågældende fluid. Når fladens temperatur er konstant, kan  $Nu$ -tallet findes ved indsættelse i formel (6.9).

$$\overline{Nu} = C \cdot (Gr_L \cdot Pr)^{c_1} = C \cdot Ra_L^{c_1} \quad (7.5)$$

Koefficienten  $C$  og eksponenten  $c_1$  kan bestemmes ud fra Tabel 7.1. Den karakteristiske længde, der skal indsættes, er for lodrette flader højden, for vandrette rektangulære flader deres gennemsnitlige længde/bredde, og for vandrette cirkelformede flader 0,9 gange diameteren. Ved flader med hældning ganges Grashof-tallet med cosinus til vinklen fra lodret, og derefter benyttes (7.5) med de samme koefficienter/eksponenter som for lodrette flader.

**Tabel 7.1: Koefficienter og eksponenter til indsættelse i ligning (7.5) for varmeoverføring ved naturlig konvektion ved en flade med konstant temperatur**

Tilfælde		$Gr_L \cdot Pr$	$C$	$c_1$
Lodrette flader	Laminar	$10^4 - 10^9$	0,59	1/4
		$10^9 - 10^{12}$	0,13	1/3
Vandrette flader med opadgående varmestrøm	Laminar	$10^5 - 2 \cdot 10^7$	0,54	1/4
	Turbulent	$2 \cdot 10^7 - 3 \cdot 10^{10}$	0,14	1/3
Vandrette flader med nedadgående varmestrøm	Laminar	$3 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^{10}$	0,27	1/4

#### 7.1.4 Naturlig konvektion, konstant varmestrøm

Dette omfatter naturlig konvektion fra flader, hvis temperatur kan variere, men hvor der pr. fladeareal er en (tilnærmelsesvis) konstant varmeafgivelse, fx fra varmemfolier/radiatorer.

I disse tilfælde gælder følgende formel:

$$\overline{Nu} = C \cdot Gr^{\frac{1}{4}} \quad (7.6)$$

hvor koefficienten  $C$  afhænger af  $Pr$ -tallet som angivet i Tabel 7.2.

**Tabel 7.2: Koefficienter til indsættelse i ligning (7.6) for varmeoverføring ved naturlig konvektion fra en flade, der afgiver konstant varmestrøm**

$Pr$	0,01	0,1	0,72	1,0	2,0	10	100	1000
$C$	0,082	0,237	0,51	0,573	0,72	1,17	2,18	3,9

---

### Eksempel: Tvungen konvektion ved ydervæg

Facaden på en bygning er 12 m lang, og det blæser langs facaden med hastigheden 4m/s. Hvor stor bliver varmeovergangen pr. arealenhed ved konvektion lokalt et antal karakteristiske steder langs facaden, samt i middel for hele facaden, når væggens udvendige overflade er 2 °C varm og luften er 0 °C?

Ved 0,25m:

Ved 1°C (middeltemperaturen i grænselaget) findes luftens kinematiske viskositet ved interpolation i Tabel 6.2 til  $1,34 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ . Det lokale Reynolds-tal 0,25m henne ad facaden beregnes til:

$$\text{Re}_{0,25m} = \frac{u \cdot x}{\nu} = \frac{4 \text{ m/s} \cdot 0,25 \text{ m}}{1,34 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 7,46 \cdot 10^4$$

Strømningen er altså laminar ( $\text{Re} < 300.000$ ).

Prandtl tallet for luft er 0,715, så det lokale Nusselt-tal kan beregnes til:

$$\text{Nu}_{0,25m} = 0,332 \cdot \text{Re}_x^{\frac{1}{2}} \cdot \text{Pr}^{\frac{1}{3}} = 0,332 \cdot (7,46 \cdot 10^4)^{\frac{1}{2}} \cdot 0,715^{\frac{1}{3}} = 81,1$$

Den konvektive varmeovergangskoefficient kan nu beregnes ved hjælp af (6.2) til:

$$h_{K;0,25m} = \frac{\text{Nu}_x \lambda}{x} = \frac{81,1 \cdot 0,0244 \text{ W/mK}}{0,25 \text{ m}} = 7,92 \text{ W/m}^2\text{K}$$

Med en temperaturforskel på 2K fås den konvektive varmestrømstæthed:

$$q_{k;0,25m} = 7,92 \text{ W/m}^2\text{K} \cdot 2 \text{ K} = 15,8 \text{ W/m}^2$$

Ved 1m:

Det lokale Reynolds-tal 1m henne ad fladen bliver:

$$\text{Re}_{1m} = \frac{u \cdot x}{\nu} = \frac{4 \text{ m/s} \cdot 1 \text{ m}}{1,34 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 2,99 \cdot 10^5$$

Strømningen er altså lige akkurat stadig laminar ( $\text{Re} < 300.000$ ).

Det lokale Nusselt-tal kan beregnes til:

$$\text{Nu}_{1m} = 0,332 \cdot (2,99 \cdot 10^5)^{\frac{1}{2}} \cdot 0,715^{\frac{1}{3}} = 162$$

Den konvektive varmeovergangskoefficient bliver:

$$h_{K;1m} = \frac{162 \cdot 0,0244 \text{ W/mK}}{1 \text{ m}} = 3,96 \text{ W/m}^2\text{K}$$

Og varmestrømstætheden bliver:

$$q_{k;1m} = 3,96 \text{ W/m}^2\text{K} \cdot 2 \text{ K} = 7,9 \text{ W/m}^2$$

Ved 2m:

Det lokale Reynolds-tal 2 m henne ad væggen beregnes til:

$$\text{Re}_{2m} = \frac{2 \text{ m/s} \cdot 2 \text{ m}}{1,34 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 5,97 \cdot 10^5$$

Strømningen er nu i det turbulent område ( $\text{Re} > 500.000$ ), og det lokale Nusselt-tal kan beregnes til:

$$\text{Nu}_{2m} = 0,029 \cdot \text{Re}_x^{0,8} \cdot \text{Pr}^{0,43} = 0,029 \cdot (5,97 \cdot 10^5)^{0,8} \cdot 0,715^{0,43} = 1048$$

Den konvektive varmeovergangskoefficient bliver:

$$h_{K;2m} = \frac{1048 \cdot 0,0244 \text{ W/mK}}{2\text{m}} = 12,8 \text{ W/m}^2 \text{K}$$

Og den konvektive varmestrømtæthed bliver:

$$q_{k;2m} = 12,8 \text{ W/m}^2 \text{K} \cdot 2\text{K} = 25,6 \text{ W/m}^2$$

Ved 6m:

Det lokale Reynolds-tal midt på fladen beregnes til:

$$\text{Re}_{6m} = \frac{4\text{m/s} \cdot 6\text{m}}{1,34 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 1,79 \cdot 10^6$$

Strømningen er i det turbulente område hvorved det lokale Nusselt-tal findes til:

$$\text{Nu}_{6m} = 0,029 \cdot (1,79 \cdot 10^6)^{0,8} \cdot 0,715^{0,43} = 2525$$

Den konvektive varmeovergangskoefficient bliver nu:

$$h_{K;6m} = \frac{2525 \cdot 0,0244 \text{ W/mK}}{6\text{m}} = 10,3 \text{ W/m}^2 \text{K}$$

Med temperaturforskellen på 2K fås den konvektive varmestrømtæthed:

$$q_{k;6m} = 10,3 \text{ W/m}^2 \text{K} \cdot 2\text{K} = 20,6 \text{ W/m}^2$$

Beregnes den lokale konvektive varmeovergang 12m henne ad fladen, fås resultatet  $q_{k;12} = 17,9 \text{ W/m}^2$ .

*Middel for hele fladen*

Re-tallet for strømning langs hele fladen er:

$$\text{Re}_L = \frac{u \cdot L}{\nu} = \frac{4\text{m/s} \cdot 12\text{m}}{1,34 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 3,58 \cdot 10^6$$

Strømningen ved den karakteristiske længde er i det turbulente område, og derfor skal formel (7.4) benyttes til udregning af middelværdien af Nu-tallet for hele fladen. Hvis strømningen havde været laminar, havde formel (7.2) skulle benyttes i stedet.

$$\overline{\text{Nu}} = 0,036 \cdot \text{Re}_L^{0,8} \cdot \text{Pr}^{\frac{1}{3}} - 836 \text{Pr}^{\frac{1}{3}}$$

$$\overline{\text{Nu}} = 0,036 (3,58 \cdot 10^6)^{0,8} \cdot 0,715^{\frac{1}{3}} - 836 \cdot 0,715^{\frac{1}{3}} = 4889$$

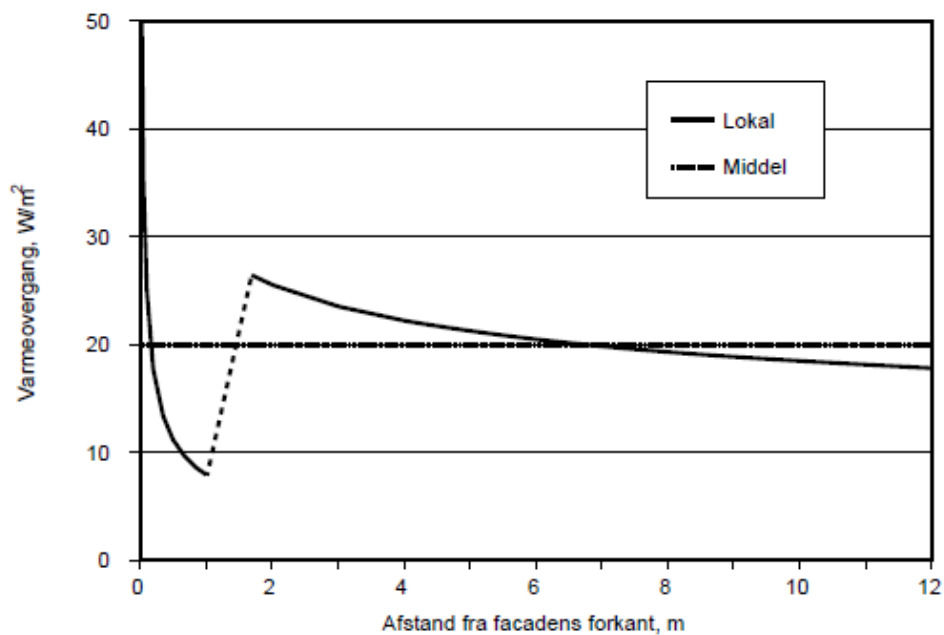
Den konvektive overgangskoefficient bliver:

$$\overline{h_K} = \frac{\overline{\text{Nu}} \cdot \lambda}{L} = \frac{4889 \cdot 0,0244 \text{ W/mK}}{12\text{m}} = 9,9 \text{ W/m}^2 \text{K}$$

Og den konvektive varmestrømtæthed bliver i middel:

$$\overline{q} = 9,9 \text{ W/m}^2 \text{K} \cdot 2\text{K} = 19,8 \text{ W/m}^2$$

Det ses af Figur 7.1, at varmeovergangen gennemgående er størst tættest på facadens forkant. Endvidere ses det, at varmeovergangen alt andet lige er større når strømningen bliver turbulent. Endelig ses det, at forskellen mellem middelværdien for varmeovergangen langs hele facaden, og den lokale værdi midt på, ikke er særlig stor.



Figur 7.1: Lokal og middel varmeovergang som funktion af afstanden fra facadens forkant. Den stiplede forbindelse fra ca. 1 til 2m markerer overgangsområdet mellem den laminare og turbulente strømning

## 7.2 Strømning mellem to parallelle flader

### 7.2.1 Tvungen konvektion

$Nu$ -tallet ved tvungen konvektion mellem to parallelle flader, er svært at bestemme, og derfor findes der kun få udtryk, hvor dette er beskrevet. I litteraturen er dette et forholdsvis specielt tilfælde, men ved byggeteknisk anvendelse kan dette ofte relevant at betragte. De hyppigste steder, hvor der vil være tvungen turbulent konvektion mellem to parallelle flader er ved solvægge og solfangere, men også bag ventilerede facadebeklædninger.

Ved laminar strømning mellem to plader, hvor den ene er velisoleret (*adiabatisk*), og den anden har konstant temperatur, findes følgende udtryk for det gennemsnitlige  $Nu$ -tal:

$$\overline{Nu}_{D_h} = 4,9 + \frac{0,0606 \left( \frac{Re_{D_h} \cdot Pr \cdot D_h}{L} \right)^{1,2}}{1 + 0,0909 \left( \frac{Re_{D_h} \cdot Pr \cdot D_h}{L} \right)^{0,7} Pr^{0,17}} \quad (7.7)$$

Den hydrauliske diameter  $D_h$  for kanalen mellem to flader, der har en stor udstrækning, er 2 gange fladeafstanden.

Ved turbulent strømning mellem to plader, hvor den ene er adiabatisk, og den anden afgiver konstant varme, findes for den fuldt udviklede strømning følgende udtryk for det lokale  $Nu$ -tal:

$$Nu_{D_h} = 0,0158 \cdot Re_{D_h}^{0,8} \quad (7.8)$$

Det gennemsnitlige  $Nu$ -tal er ved denne formel, (7.8), undervurderet med på til 15%, fordi de højere værdier ved rør-indløbet er negligeret.

### 7.2.2 Naturlig konvektion

Tilfælde af naturlig konvektion findes i lukkede hulrum mellem to flader, hvor et typisk og relevant eksempel er mellem glaslagene i ruder.

I de nedenfor nævnte tilfælde er den karakteristiske længde  $L$  afstanden mellem fladerne, og  $H$  er længden/højden af fladerne. Formlerne gælder for tilfælde, hvor  $H$  er mindst 10 gange så stor som  $L$ . Der findes specialudtryk, der dækker andre geometrier, men disse vil ikke blive gengivet her.

For lodrette mellemrum gælder følgende udtryk:

$$\overline{Nu}_{L,90^\circ} = \max \left\{ \begin{array}{l} 0,0605 \cdot Ra_L^{\frac{1}{3}} \\ 1 + \left( \frac{0,104 \cdot Ra_L^{0,293}}{1 + \left( \frac{6310}{Ra_L} \right)^{1,36}} \right)^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\ 0,242 \left( \frac{Ra_L}{\frac{H}{L}} \right)^{0,272} \end{array} \right. \quad (7.9)$$

Udtrykket gælder for  $Ra_L$  i intervallet  $10^3 - 10^7$ . Ved mindre Rayleigh-tal kan der regnes med, at den naturlige konvektion er forsvindende, det vil sige, der kun er ledning i luften, så  $Nu$ -tallet derved er lig 1.



Hvis fladerne hælder 60° gælder følgende udtryk:

$$\overline{Nu}_{L,60^\circ} = \max \left\{ \left( 1 + \frac{0,0936 \cdot Ra_L^{0,314}}{1 + \frac{0,5}{\left( 1 + \left( \frac{Ra_L}{3160} \right)^{20,6} \right)^{0,1}}} \right)^7 \right)^{\frac{1}{7}}, \left( 0,104 + \frac{0,175}{\frac{H}{L}} \right) Ra_L^{0,283} \right\} \quad (7.10)$$

For hældninger mellem 60° og 90° interpoleres mellem resultaterne fra (7.9) og (7.10).

For hældninger  $\theta$  mellem 0° og 60° gælder nedenstående udtryk, hvor  $\theta$  er fladehældningen i forhold til vandret

$$\overline{Nu}_{L,<60^\circ} = 1 + 1,44 \left( 1 - \frac{1708}{Ra_L \cos \theta} \right) \left( 1 - \frac{1708 (\sin(1,80\theta))^{1,6}}{Ra_L \cos \theta} \right) + \left( \left( \frac{Ra_L \cos \theta}{5830} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right) \quad (7.11)$$

Hvis leddene i parenteserne i ligning (7.11) er negative, skal de erstattes med tallet 0. Ligning (7.11) er gyldig for  $Ra_L$ -tal op til  $10^5$ , og gælder for tilfælde, hvor det er den nedre flade, der er den varme.

### Eksempel: Varmetransmission gennem 2-lags rude

Bestem varmetransmissionskoefficienten (U-værdien) for en 2-lags rude, når der kun betragtes varmeovergang ved konvektion. Der er 14 mm luft mellem glaslagene og ruden er 1 m høj. Det yderste glaslag har temperaturen 275,15K (2 °C) og det inderste 286,15K (13 °C). De udendørs forhold er som i eksemplet tvungen konvektion ved ydervæg med  $T=273,15K$  (0 °C), og den indendørs temperatur er 293,15K (20 °C).

*Udendørs varmeovergang:*

Den udvendige konvektive overgangsisolans er den reciprokke værdi af den konvektive varmeovergangskoefficient. Benyttes middelværdien fra eksemplet tvungen konvektion ved ydervæg, fås

$$R_{se} = \frac{1}{9,9 \text{ W/m}^2 \text{ K}} = 0,10 \text{ m}^2 \text{ K/W}$$

*Varmeovergang i spalten mellem glaslagene:*

For at  $Nu$ -tallet kan bestemmes, skal Rayleigh-tallet bestemmes. Gennemsnitstemperaturen er 280,65K (7,5°C), og ved denne temperatur er  $Pr$ -tallet 0,714, den kinematiske viskositet  $1,398 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ , og varmeledningsevnen 0,0248 W/mK. Grashof-tallet beregnes.

$$Gr = \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot L^3}{\nu^2} = \frac{9,82 \text{ m/s}^2 \cdot \frac{1}{280,65 \text{ K}} \cdot 11 \text{ K} \cdot (0,014 \text{ m})^3}{(1,398 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s})^2} = 5397$$

Rayleigh tallet findes som produktet af  $Pr$  og  $Gr$ .

$$Ra_L = 0,714 \cdot 5397 = 3853$$

Ifølge (7.9), bliver  $Nu_L$ -tallet for den lodrette vinduesspalte:

$$\overline{Nu}_{L,90^\circ} = \max \begin{cases} 0,949 \\ 1,020 = 1,020 \\ 0,716 \end{cases}$$

Den konvektive varmeovergangskoefficient findes.

$$h_{K,spalte} = \frac{\overline{Nu}_L \cdot \lambda}{L} = \frac{1,020 \cdot 0,0248 \text{ W/mK}}{0,014 \text{ m}} = 1,81 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

Isolansen er det reciprokke heraf.

$$R_{spalte} = \frac{1}{1,81} = 0,55 \text{ m}^2 \text{ K/W}$$

*Indendørs varmeovergang:*

Indendørs regnes med, at der ikke er påtvungne luftbevægelser af betydning, så der kan her regnes med naturlig konvektion. Teorien for konstant fladetemperatur, (7.5), benyttes. Gennemsnitstemperaturen er 289,65K (16,5°C), og ved denne temperatur er luftens  $Pr$ -tal 0,713, den kinematiske viskositet er  $1,479 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ , og varmeledningsevnen er 0,0255 W/mK. Grashof-tallet beregnes.

$$Gr = \frac{9,82 \cdot \frac{1}{289,65 \text{ K}} \cdot 7 \text{ K} \cdot (1 \text{ m})^3}{(1,479 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s})^2} = 1,08 \cdot 10^9$$

$Ra$ -tallet bliver derved  $7,70 \cdot 10^8$ , hvorved  $Nu$ -tallet kan beregnes ud fra (7.5).

$$\overline{Nu} = c \cdot Ra_L^{c_1} = 0,59 \cdot (7,70 \cdot 10^8)^{\frac{1}{4}} = 98,3$$

Her bliver den konvektive varmeovergangskoefficient:

$$h_{K,i} = \frac{\overline{Nu}_{L,i} \cdot \lambda}{L} = \frac{98,3 \cdot 0,0255 \text{ W/mK}}{1 \text{ m}} = 2,51 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

Og den indendørs overgangsisolans findes til

$$R_{si} = \frac{1}{2,51} = 0,40 \text{ m}^2 \text{ K/W}$$

Rudens samlede isolans er  $1,05 \text{ m}^2\text{K/W}$ , hvilket svarer til en U-værdi på  $0,95 \text{ W/m}^2\text{K}$ . Dette ville være en overordentlig god termorude, men i dette er der ikke taget hensyn til de væsentlige bidrag fra strålingen til varmeovergangene.

---

### 7.3 Strømning i rør og kanaler

Varmeoverføringen pr. længdeenhed er størst lige ved indløbet til røret/kanalen, og derefter bliver varmeoverføringen konstant. Indløbslængden,  $x_e$ , kan tilnærmes ved:

$$x_e = 0,05 \cdot Re_D \cdot D \quad (7.12)$$

Strømningen betegnes som fuldt udviklet, når indløbslængden er passeret. I de fleste tilfælde kan der ses bort fra de særlige forhold ved indløbet, da dette som regel kun udgør en mindre del af rør/kanallængden.

Eftersom der ofte vil være en pumpe eller ventilator, der driver fluidet gennem røret, vil det kun have interesse at undersøge for tvungen konvektion. Der eksisterer selvcirkulerende radiator- og solvarmeanlæg, men her vil væskestrømmen være bestemt af hele anlæggets udformning på en sådan måde, at varmeoverførslen internt i røret skal behandles som tvungen konvektion.

Strømningshastigheden i rør/kanaler forudsættes at være kendt, og udfra strømningsmekanikken kendes sammenhængen mellem flow, tryktab og rør/kanalgeometri kan ligeledes.

#### 7.3.1 Laminar strømning

Ved laminar strømning i rør/kanaler finder varmeudvekslingen helt overvejende sted ved varmeledning internt i fluidet. Der gælder da følgende  $Nu$ -tal.

Konstant varmestrøm eller konstant temperaturforskel:

$$Nu_D = 4,364 \quad (7.13)$$

Konstant temperatur af rør-kanalvæg:

$$Nu_D = 3,656 \quad (7.14)$$

Disse udtryk er kun gyldige for den fuldt udviklede del af strømningen og er derfor kun en tilnærmelse til  $\overline{Nu_D}$ . Der findes særlige formler for  $Nu$ -tallet i indløbsområdet, som ikke vil blive gengivet her.

#### 7.3.2 Turbulent strømning

Her gælder følgende udtryk for  $Nu$ -tallet i den fuldt udviklede strømning:

$$Nu_D = 0,023 \cdot Re_D^{0,8} \cdot Pr^{0,4} \quad (7.15)$$

Denne formel kan bruges, hvis rørets længde er mindst 60 gange diameteren,  $Pr$ -tallet ligger i intervallet 0,5 - 100, og  $Re_D$ -tallet i intervallet 10.000 - 100.000.

## 7.4 Strømning omkring rør og kanaler


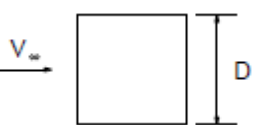
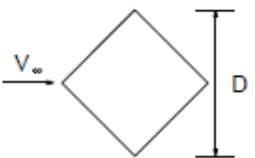
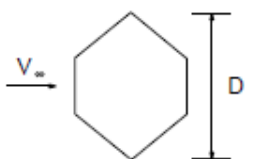




### 7.4.1 Tvungen konvektion omkring enkeltrør/kanaler

Ved strømning omkring et rør, hvor strømningen går vinkelret på rørets akse, findes følgende formel:

$$\overline{Nu_D} = C \cdot Re_D^{c_1} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \quad (7.16)$$

hvor koefficienterne og eksponenterne  $C$  og  $c_1$  fås af Tabel 7.3.

Tabel 7.3: Koefficienter og eksponenter til brug for ligning (7.16) ved forskellige rørudformninger og strømhastigheder. Den karakteristiske længde  $D$  i ligning (7.16) er profilets dimension vinkelret på strømmingen.  $V_\infty$  er strømmingens hastighed i det omgivende fri felt

Rørudformning	$Re_D$	$C$	$c_l$
	0,4 - 4	0,989	0,330
	4 - 40	0,911	0,385
	40 - 4000	0,683	0,466
	4000 - 40.000	0,193	0,618
	40.000 - 400.000	0,027	0,805
	2500 - 7500	0,261	0,624
	5000 - 100.000	0,222	0,588
	2500 - 8000	0,160	0,699
	5000 - 10.000	0,092	0,675
	5000 - 19.500	0,144	0,638
	19.500 - 100.000	0,035	0,782
	5000 - 100.000	0,138	0,638
	4000 - 15.000	0,205	0,731
	2500 - 15.000	0,224	0,612
	3000 - 15.000	0,085	0,804

Når strømmingen ikke sker vinkelret på rørene, formindskes varmeoverføringen i forhold til  $Nu$ -tallene, der kan udledes ved hjælp af (7.16) og Tabel 7.3. Reduktionen fremgår af Tabel 7.4.

**Tabel 7.4: Reduktion i Nu-tallet for strømning hen over rør, når strømmingen ikke går vinkelret på røret**

$\theta$	90	80	70	60	50	40	30	20
$Nu_{\theta}/Nu_{90^{\circ}}$	1,0	1,0	0,99	0,95	0,86	0,75	0,63	0,50

I varmevekslere er det ikke ualmindeligt, at rørene ligger i bundter, således at strømningsprofilerne omkring de enkelte rør påvirker hinanden. Dette giver nogle andre  $Nu$ -tal i afhængighed af antallet af rør, afstanden imellem dem og hvordan de indbyrdes er placeret (på række eller forskudt). Tabeller og udtryk herfor er ikke videre kommenteret i dette notat, men skal findes i litteraturen.

#### 7.4.2 Naturlig konvektion omkring rør

Ved naturlig konvektion omkring rør (cylindre) gælder samme ligning som for flader (7.5):

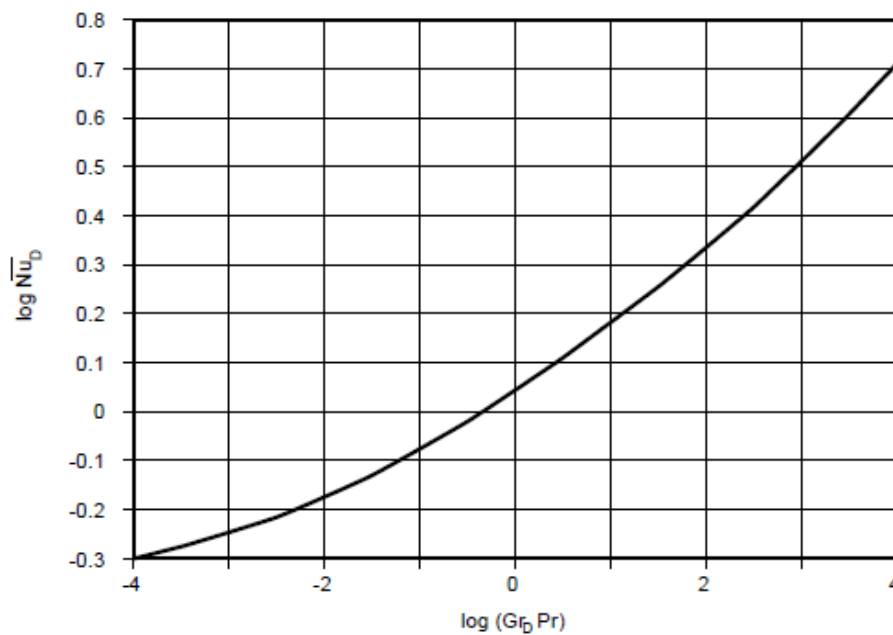
$$\overline{Nu} = C \cdot (Gr_D \cdot Pr)^{c_1} = C \cdot Ra_D^{c_1} \quad (7.17)$$

For vandrette cylindre gælder koefficienter og eksponenter fra Tabel 7.5. Den karakteristiske længde er rørets diameter. Lodrette cylindre med stor diameter kan behandles som lodrette flader.

**Tabel 7.5: Koefficienter og eksponenter til indsættelse i ligning (7.17) for varmeoverføring ved naturlig konvektion omkring vandrette cylindre med konstant temperatur**

Tilfælde		$Gr_L \cdot Pr$	$C$	$c_1$
Vandret cylinder	Laminar	$10^4 - 10^9$	0,53	1/4
	Turbulent	$10^9 - 10^{12}$	0,13	1/3

For  $Ra$ -tal mindre end  $10^4$  gælder (7.17) ikke længere. I dette område henvises til Figur 7.2.



Figur 7.2: Korrelation mellem Nu-tallet og Ra-tallet for naturlig konvektion omkring vandrette rør med lave Ra-tal (under  $10^4$ )

### Eksempel: Varmetab fra varmerør

Et uisoleret varmerør har en indvendig diameter på 24mm og en udvendig diameter på 27mm. I røret flyder vand med en temperatur på 333,15K (60 °C) og middelhastighed 0,5 m/s. Røret er ophængt vandret i et rum, hvor lufttemperaturen er 293,15K (20 °C). Rørmaterialet leder varmen "uendeligt" godt, så røret har samme indvendige og udvendige overfladetemperatur. Bestem rørets temperatur og varmetabet fra røret pr. løbende meter.

#### Den indvendige del af røret

På den indvendige side af røret er der tvungen konvektion. For at bestemme væskens termiske egenskaber må middeltemperaturen i grænselaget kendes, og derfor må der først gættes på en rørtemperatur. Da rørvæggen formentlig er i væsentlig bedre termisk kontakt med væsken i røret end med den omgivende luft, gættes på en rørtemperatur på 332,15K (59 °C). Pr-tallet for det varme vand i røret ved middeltemperaturen 59,5°C er 3,02, den kinematiske viskositet er  $0,479 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  og varmeledningsevnen er  $0,650 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ .  $Re_D$  kan da beregnes:

$$Re_{D_i} = \frac{u \cdot D_i}{\nu} = \frac{0,5 \text{ m/s} \cdot 0,024 \text{ m}}{0,479 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 2,51 \cdot 10^4$$

Strømningen er altså turbulent, og forudsætningerne for at bruge (7.15) til at bestemme den indvendige konvektive varmeovergang mellem rørvæske og røroverflade er opfyldt for den del af røret, der er længere end 1,44 m (60 gange diameteren).

$$Nu_{D_i} = 0,023 Re_{D_i}^{0,8} \cdot Pr^{0,4} = 0,023 (2,51 \cdot 10^4)^{0,8} \cdot 3,02^{0,4} = 118$$

Den konvektive overgangskoefficient pr. arealenhed af den indvendige røroverflade er:

$$h_{K,i} = \frac{Nu_{D_i} \cdot \lambda}{D_i} = \frac{118,0 \cdot 650 \text{ W/mK}}{0,024 \text{ m}} = 3200 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

Rørets indvendige overfladeareal pr. lbm rør er  $\pi \cdot 0,024 \text{ m} = 0,075 \text{ m}^2/\text{m}$ , så varmeovergangskoefficienten pr. m rør er  $0,075 \text{ m} \cdot 3200 \text{ W/m}^2 \text{ K} = 240 \text{ W/mK}$ .

#### Den udvendige del af røret

På den udvendige side er der naturlig konvektion. Med den ovenfor gættede rørtemperatur på 332,15K (59 °C) er middeltemperaturen i luftens grænselag 312,65K (39,5°C), hvilket giver et Pr-tal på 0,711, en kinematisk viskositet på  $1,692 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  og varmeledningsevnen 0,0271 W/mK. Det udvendige Grashof-tal beregnes:

$$Gr_{D_u} = \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot D_u^3}{\nu^2} = \frac{9,82 \text{ m/s}^2 \cdot \frac{1}{313 \text{ K}} \cdot 39 \text{ K} \cdot (0,027 \text{ m})^3}{(1,692 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s})^2} = 8,41 \cdot 10^4$$

Ra-tallet bliver  $0,711 \cdot 8,41 \cdot 10^4 = 5,98 \cdot 10^4$ , så strømmingen omkring røret er laminar (jvf. Tabel 7.5). Efter (7.17) og Tabel 7.5 kan Nu-tallet beregnes som følger:

$$Nu_{D_u} = C \cdot Ra_L^{c_1} = 0,53 \cdot (5,98 \cdot 10^4)^{\frac{1}{4}} = 8,3$$

Den konvektive overgangskoefficient pr. arealenhed af den udvendige røroverflade er:

$$h_u = \frac{Nu_{D_u} \cdot \lambda}{D_u} = \frac{8,3 \cdot 0,0271 \text{ W/mK}}{0,027 \text{ m}} = 8,33 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

Rørets udvendige overfladeareal pr. lbm rør er  $\pi \cdot 0,027 \text{ m} = 0,085 \text{ m}^2/\text{m}$ , så varmeovergangskoefficienten pr. m rør er  $0,085 \text{ m} \cdot 8,33 \text{ W/m}^2 \text{ K} = 0,71 \text{ W/mK}$ .

#### Varmebalance for røret

Der opstilles en varmebalance, som siger, at varmeovergangen fra vand til rørvæg skal være lig varmeovergangen fra rørvæg til luft. Heraf kan rørets temperatur isoleres:

$$\begin{aligned} q_i &= q_u \Rightarrow \\ 204 \text{ W/mK} \cdot (333,15 \text{ K} - T_{r\phi r}) &= 0,71 \text{ W/mK} \cdot (T_{r\phi r} - 293,15 \text{ K}) \Rightarrow \\ T_{r\phi r} &= 333,05 \text{ K} \quad (59,9^\circ \text{ C}) \end{aligned}$$

Dette resultat ligger tilpas tæt på udgangsgættet til, at en ny iteration ikke vil ændre nævneværdigt på de anvendte termiske parametre eller på temperaturforskellen, der indgår i Grashof-tallet for den udvendige side. Rørets varmetab er derved:

$$q' = 0,71 \text{ W/mK} \cdot (333,05 \text{ K} - 293,15 \text{ K}) = 28,3 \text{ W/m}$$

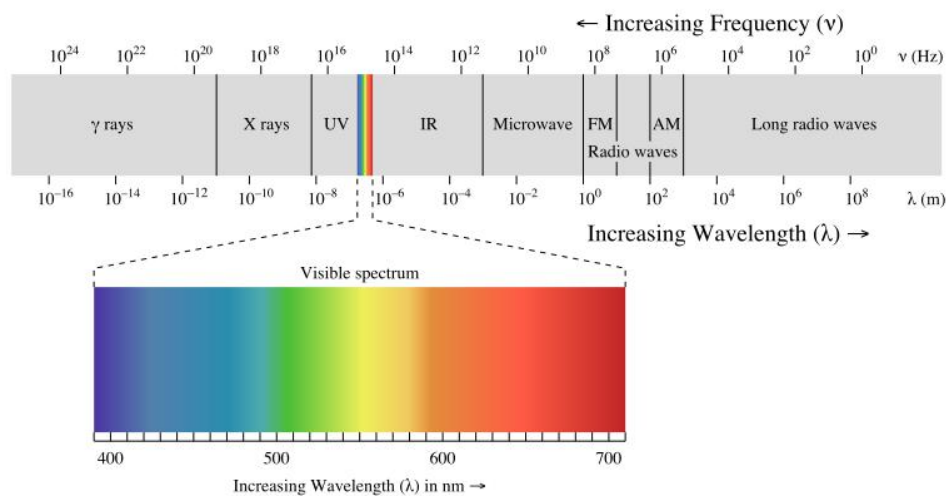

---





## 8. Stråling

Varmestråling er elektromagnetiske bølger, på samme måde som radiobølger og lys og er det. Figur 8.1 illustrerer elektromagnetisk stråling ved forskellige bølgelængder, og det ses, at stråling er delt op i forskellige bølgelængdeintervaller og derved strålingstyper. Varmestråling er defineret ved bølgelængder mellem  $0,01\mu\text{m}$  og  $100\mu\text{m}$ . Varmestråling består derfor af strålingstyperne ultraviolet stråling med bølgelængder mellem  $0,01\mu\text{m}$  og  $0,40\mu\text{m}$ , synligt lys med bølgelængder mellem  $0,40\mu\text{m}$  og  $0,74\mu\text{m}$  samt infrarød stråling med bølgelængder mellem  $0,74\mu\text{m}$  og  $100\mu\text{m}$ .



Figur 8.1: Forskellige spektre af elektromagnetisk stråling med fremhævelse af det synlige lys ([http://en.wikipedia.org/wiki/Electromagnetic\\_radiation](http://en.wikipedia.org/wiki/Electromagnetic_radiation))

Alle legemer udsender varmemstråling, og effekten af udstrålingen afhænger af legemets overfladeegenskaber og dets temperatur. For et såkaldt sort legeme er emissiviteten 1, hvorfor udstrålingen udelukkende afhænger af den absolutte temperatur. Der findes ikke overflader, der udstråler mere end et absolut sort legeme. For et absolut sort legeme er der følgende sammenhæng mellem udstrålingseffekten,  $E_s$ , og den absolutte temperatur,  $T$ .

$$E_s = \sigma_s T^4 \quad (8.1)$$

Udstrålingseffekten er den totale udstrålede energi pr. areal- og tidsenhed over alle bølgelængder, som forlader overfladen i alle retninger, og afhænger af deres emissivitet (dvs. dets overflade) og temperatur. Udstrålingseffekten inkluderer således ikke den reflekterede energi fra overfladen. Der kan regnes med, at solens temperatur er 5780K.

### 8.1 Wiens forskydningslov

Udstrålingsintensiteten er forskellig ved forskellige bølgelængder, og denne såkaldte spektrale fordeling af bølgelængderne afhænger af temperaturen. Bølgelængden,  $\lambda$ , hvor den maksimale intensitet forekommer ved en bestemt temperatur, kan bestemmes af Wiens forskydningslov.

$$\lambda_{\max} = \frac{0,002897 K}{T} \quad (8.2)$$

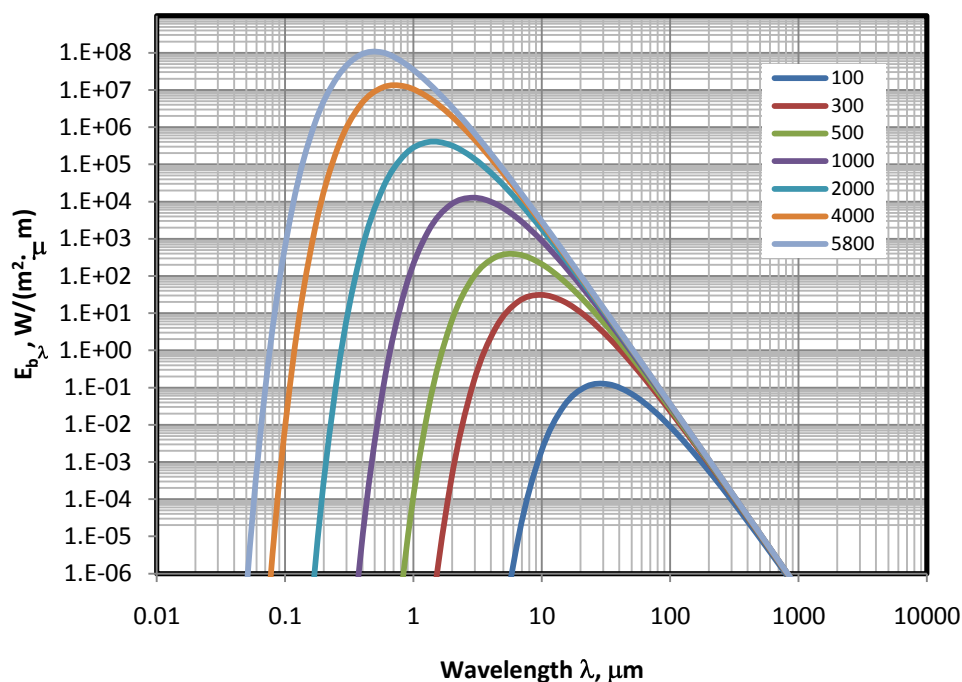
### 8.2 Plancks lov

Strålingsintensiteten fra et sort legeme som funktion af temperatur og bølgelængde kan beregnes ud fra Plancks lov.

$$E_{s,\lambda} = \frac{3,742 \cdot 10^8 \text{ Wmm}^4 / \text{m}^2}{\lambda^5 \cdot \left( e^{\frac{1,439 \cdot 10^4 \text{ mmK}}{\lambda \cdot T}} - 1 \right)} \quad (8.3)$$

Enheden for denne bølgelængdeafhængige udstråling er  $\text{W/m}^3$  og en sammenhæng mellem strålingsintensiteten og bølgelængden ved forskellige temperaturer kan ses i Figur 8.2. Her er det bl.a. tydeligt, at

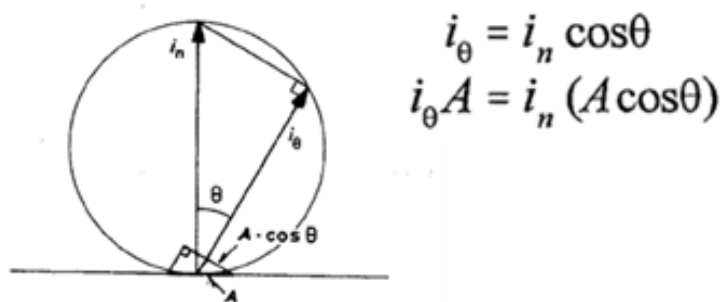
- Udstrålingen varierer kontinuert med bølgelængden
- Ved enhver bølgelængde stiger udstrålingen med temperaturen
- Det bølgelængdeområde, hvor udstrålingen dominerer, afhænger af temperaturen og forskydes mod kortere bølgelængder med stigende temperatur



Figur 8.2: Spektralfordeling af udstrålingen for et sort legeme.

### 8.3 Lamberts cosinuslov

Strålingens rummelige fordeling bygger på iagttagelser foretaget af Johann Lambert i midten af 1700-tallet, hvor en glødende messingkugle stråler som en helt ensartet lysende skive. Her er det beskrevet, at udstrålingen varierer med cosinus til strålingsretningen til fladens normal.

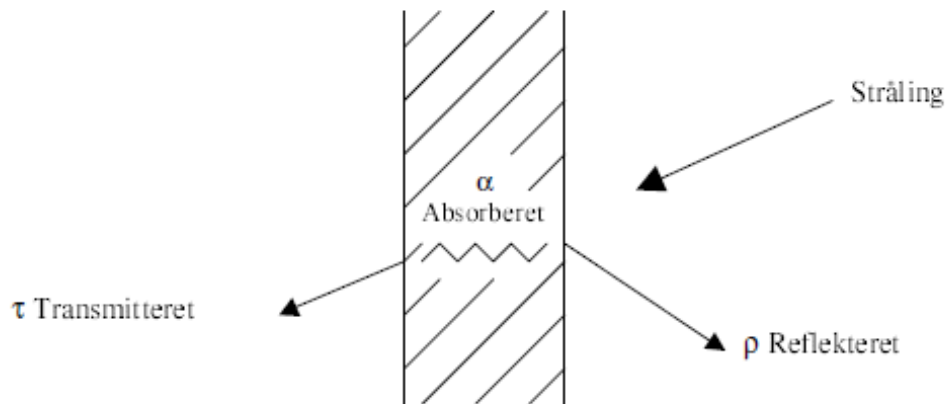


Figur 8.3: Lamberts cosinuslov.

## 9. Strålingsdefinitioner

Ved stråling mellem legemer af forskellig temperatur forstås en samlet varmeudveksling mellem legemerne, der forplanter sig gennem rummet mellem disse, og som skyldes samtlige de i strålingen deltagende legemers evne til at udsende og indsuge strålende energi.

Når stråling rammer på en given overflade, vil en del blive absorberet, en del reflekteret og en del transmitteret.



Figur 9.1: Tilfældig stråling, der rammer en overflade og bliver reflekteret, absorberet og transmitteret

Absorptans ( $\alpha$ ) er legemets evne til at forvandle strålingsenergi til varmeenergi.

$$\alpha = \frac{\text{Indfalden stråling absorberet}}{\text{Indfalden stråling}}$$

Reflektans ( $\rho$ ) er den del af den indstrålede energi, der tilbagekastes fra legemets overflade.

$$\rho = \frac{\text{Indfalden stråling reflekteret}}{\text{Indfalden stråling}}$$

Transmittans ( $\tau$ ) er den del af den indstrålede energi, der transmitteres gennem legemet.

$$\tau = \frac{\text{Indfalden stråling transmitteret}}{\text{Indfalden stråling}}$$

Emissivitet ( $\epsilon$ ) (Strålingsevnen) er legemernes evne til at forvandle varmeenergi til udstrålingseffekt (strålende energi). Emissiviteten er et udtryk for emissionsevnen og er nærmere beskrevet under afsnittet om "Strålingsudveksling mellem grå overflader".

Absorptansen, reflektansen og transmittansen er i forhold til den totale indfaldet stråling, så derfor skal summen af disse give 1.

$$\alpha + \rho + \tau = 1 \quad (9.1)$$

I tilfælde, hvor transmittansen vil være lig 0 (fx for vægge) gælder:

$$\alpha + \rho = 1 \quad (9.2)$$

I tilfælde, hvor reflektansen vil være lig 0 (fx for luft) gælder:

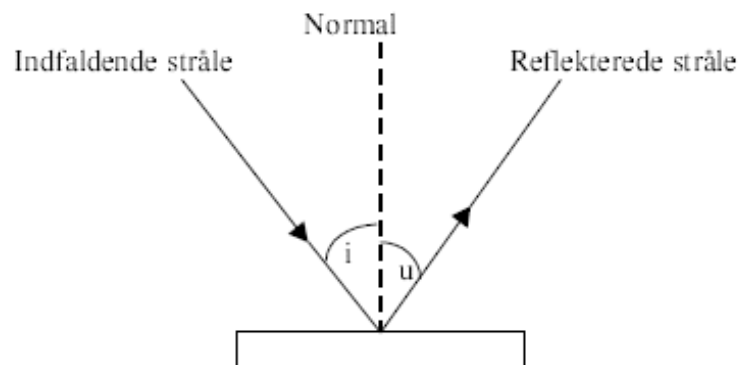
$$\alpha + \tau = 1 \quad (9.3)$$

Det vil kun være i yderst sjældne tilfælde, at absorptansen kan være 0, eftersom dette fx vil kræve en meget blank overflade, med en høj reflektans. Derimod er der eksempler på materialer med absorptanser tæt på 1. Hvis absorptansen netop er 1 er legemet kendetegnet ved at al indkommen strålende energi bliver forvandlet til varmeenergi, hvilket netop definerer et sort legeme.

## 10. Spejlende- og diffus overflade

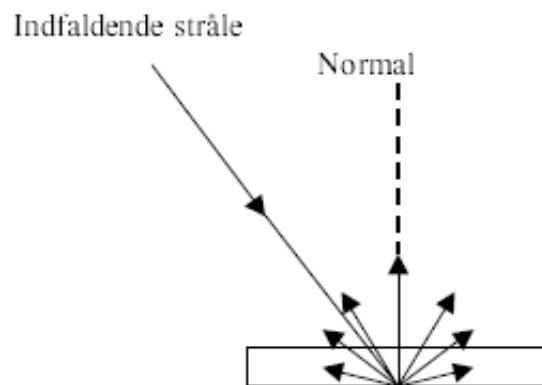
Ved en perfekt spejlende overflade er vinklen for den indfaldende stråle lig vinklen for den udfaldende stråle, se Figur 10.1.

$$\cos(i) = \cos(u)$$



Figur 10.1: Spejlende overflade, indfaldsvinkel=udfaldsvinkel

Ved en diffus overflade er størrelsen af den reflekterede energi i en specifik retning  $u$  proportional med cosinus til  $u$ , hvor  $u$  måles i forhold til fladens normal. Dette er illustreret på Figur 10.2.



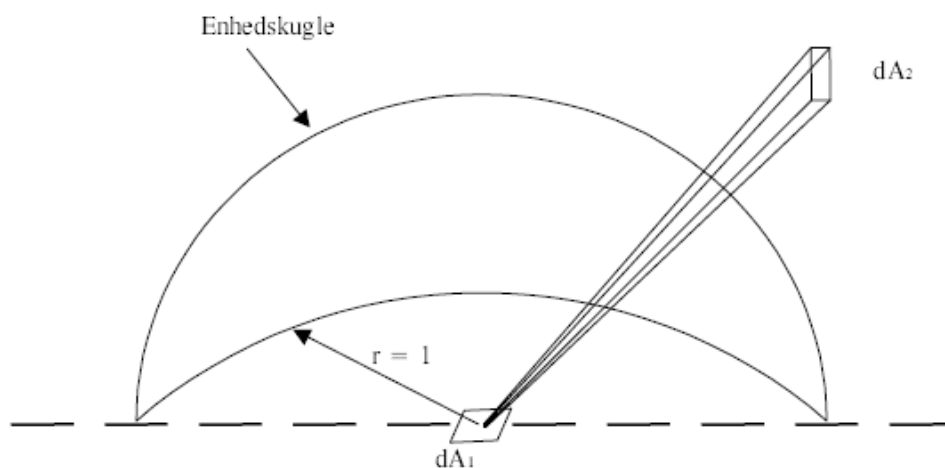
Figur 10.2: Diffus overflade, reflekteret energi er proportional med  $\cos(u)$

## 11. Strålingsudveksling mellem sorte overflader

For at beregne strålingsudvekslingen mellem to sorte overflader ( $\alpha_s=1$ ,  $\tau=0$ ,  $\rho=0$ ) er det hensigtsmæssigt at indføre vinkelforholdet  $F_{1-2}$  ( $0 \leq F \leq 1$ ) mellem de to flader. Strålingsudvekslingen afhænger af strålingstallet, som for sorte legemer er det samme som Stefan-Boltzmanns konstant,  $\sigma_s = 5,670 \cdot 10^{-8} \text{ W / m}^2 \text{ K}^4$ .

### 11.1 Vinkelforhold

Ved vinkelforholdet  $F_{1-2}$  forstås forholdet mellem den energimængde der udstråles fra flade  $dA_1$  til  $dA_2$  og den samlede energimængde, som udstråles mod en enhedshalvkugle over flade  $dA_1$  med  $dA_1$  som centrum. Begge overflader regnes diffuse og deres størrelse uendeligt lille. På Figur 11.1 er dette illustreret grafisk.



Figur 11.1: Illustration af vinkelforholdet  $F_{1-2}$

En regningsmæssig bestemmelse af vinkelforholdet mellem to flader er relativ kompliceret. Derfor er der opstillet diagrammer til bestemmelse af vinkelforholdet mellem to flader, hvis dimensioner og indbyrdes beliggenhed er kendt. Diagrammer for fire forskellige tilfælde er vist i bilag 2.

Strålingen varierer med størrelse og retning, og vekselvirkning mellem to flader  $A_1$  og  $A_2$ , når  $F_{1-2}$  er vinkelforholdet fra flade 1 til flade 2 og  $F_{2-1}$  er vinkelforholdet fra flade 2 til flade 1 kan opstilles.

$$F_{1-2} \cdot A_1 = F_{2-1} \cdot A_2 \quad (11.1)$$

Når vinkelforholdet kendes, er det muligt at finde varmestrålingen fra flade 1 til flade 2. Ofte til flade 2 samtidig have en varmestråling mod flade 1, og den resulterende varmestråling mellem de to flader kan da findes.

#### **Varmestrålingen fra flade 1 til flade 2 (Begge sorte)**

Udstrålingsenergien fra flade 1 med arealet  $A_1$  og temperaturen  $T_1$  mod flade 2 er givet ved følgende ligning (jf. ligning (8.1)):

$$\Phi_{1-2} = F_{1-2} \cdot A_1 \cdot \sigma_s \cdot T_1^4 \quad (11.2)$$

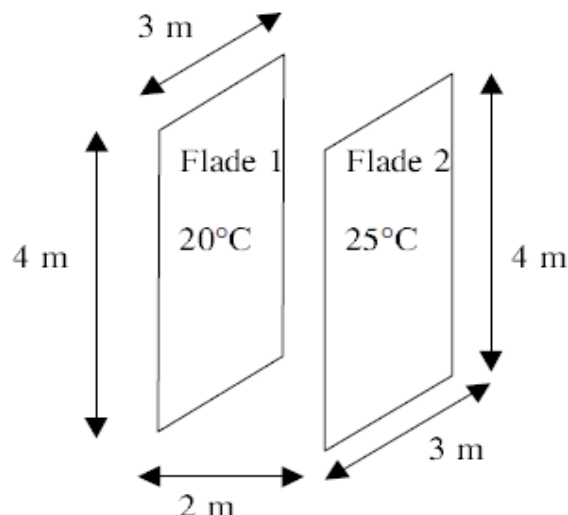
#### **Den resulterende varmestråling mellem flade 1 og 2 (Begge sorte)**

Strålingsudvekslingen mellem flade 1 og 2 med arealerne og temperaturerne henholdsvis  $A_1$ ,  $T_1$  og  $A_2$ ,  $T_2$  er givet ved (jf. ligning (11.1) og (11.2)):

$$\Phi_{1-2} = F_{1-2} \cdot A_1 \cdot \sigma_s \cdot (T_1^4 - T_2^4) \quad (11.3)$$

#### **Eksempel: Resulterende varmestråling mellem flade 1 og flade 2 (sort legeme)**

Bestem den resulterende varmestråling mellem flade 1 og 2, der er vist på figuren. Begge flader kan opfattes som sorte.



**Figur 11.2: To sorte flader med overfladetemperaturerne 20 °C og 25°C**

Først beregnes vinkelforholdet mellem fladerne ved hjælp af diagram 3 i bilag 2, hvor følgende værdier benyttes.

$$a = 3\text{ m} \quad b = 4\text{ m} \quad c = 2\text{ m} \\ b/c = 4/2 = 2 \quad a/c = 3/2 = 1,5$$

hvorefter vinkelforholdet  $F_{1-2}$  kan aflæses til:  $F_{1-2} = 0,36$



Den resulterende varmestråling kan herefter findes ved hjælp af (11.3):

$$\Phi_{1-2} = F_{1-2} \cdot A_1 \cdot \sigma_s \cdot (T_1^4 - T_2^4)$$

$$\Phi_{1-2} = 0,36 \cdot 12 \text{ m}^2 \cdot 5,670 \cdot 10^{-8} \text{ W / m}^2 \text{ K}^4 \cdot (293,15^4 \text{ K}^4 - 298,15^4 \text{ K}^4)$$

$$\Phi_{1-2} = -126 \text{ W}$$

Hvilket medfører at flade 1 får tilført energi, da varmestrålingen fra flade 2 til flade 1 er større end fra flade 1 til flade 2.

Hvis omgivelsernes temperatur er 0°C, hvad bliver da den resulterende varmestråling fra flade 1 til omgivelserne?

$$\Phi_{1-\text{omg}} = (1 - 0,36) \cdot 12 \cdot 5,670 \cdot 10^{-8} \cdot (293,15^4 - 273,15^4)$$

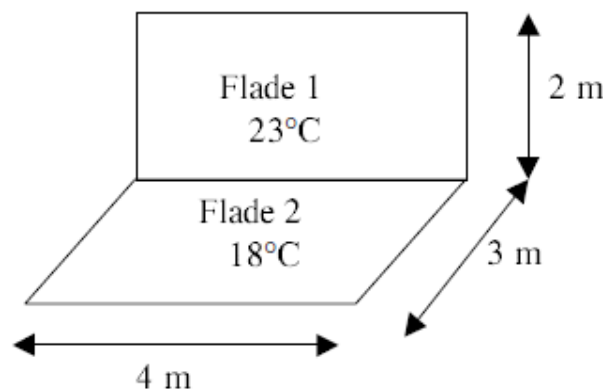
$$\Phi_{1-\text{omg}} = 790 \text{ W}$$

Hvad bliver den samlede resulterende varmestrøm fra flade 1 under disse betingelser?

$$\Phi_{1-\text{total}} = \Phi_{1-2} + \Phi_{1-\text{omg}} = -126 + 760 = 664 \text{ W}$$

**Øvelse: Bestem den resulterende varmestråling mellem flade 1 og 2.**

Bestem den resulterende varmestråling mellem flade 1 og 2 vist på figuren, når begge flader opfattes som sorte.



Løsning:

$$F_{1-2} = 0,275$$

$$\Phi_{1-2} = 63,1 \text{ W}$$

## 12. Strålingsudveksling mellem grå overflader

Forholdet mellem udstrålingseffekten fra et vilkårligt legeme og fra et absolut sort legeme betegnes med emissiviteten,  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{E}{E_s} = \frac{\sigma \cdot T^4}{\sigma_s \cdot T^4} = \frac{\sigma}{\sigma_s} \quad (12.1)$$

Af (12.1) fremgår det, at emissiviteten er forholdet mellem udstrålingseffekten for legemet i forhold til udstrålingseffekten for et absolut sort legeme. Temperaturen for de to legemer er ens, så når temperaturen divideres ud er emissiviteten

strålingstallet for legemet i forhold til Stefan-Boltzmann's konstant,  $\sigma_s = 5,670 \cdot 10^{-8} \text{ W / m}^2 \text{ K}^4$ , som er strålingstallet for det sorte legeme.

Grå overflader er kendetegnet ved at de foruden at absorbere stråling reflekterer en brøkdel af denne diffust. For grå legemer vil det gælde at emissiviteten er tæt på 1. Det er derfor en rimelig tilnærmelse kun at tage hensyn til den første absorption på hver af fladerne, medens den refleksion, der rammer dem, lades ude af betragtning. Herved er det muligt at opskrive den resulterende strålingsudveksling mellem to grå overflader 1 og 2 med arealerne og temperaturerne  $A_1$ ,  $T_1$  og  $A_2$ ,  $T_2$  på formen (jf. (11.3)):

$$\Phi_{1-2} = F_{1-2} \cdot A_1 \cdot \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{\sigma_s} (T_1^4 - T_2^4) \quad (12.2)$$

idet  $\sigma_s$  blot er erstattet med  $\frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{\sigma_s}$ , hvor  $\sigma_1$  og  $\sigma_2$  betegner strålingstallene for flade 1 og 2.

Ved indsættelse af emissiviteten (12.1) kan (12.2) også skrives som

$$\Phi_{1-2} = F_{1-2} \cdot A_1 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \sigma_s \cdot (T_1^4 - T_2^4) \quad (12.3)$$

For byggetekniske materialer gælder det, at de kan opfattes som grå legemer over for langbølget stråling, da deres reflektans i de fleste tilfælde er mindre end eller lig 0,10, svarende til en emissivitet på mindst 0,9. I Tabel 12.1 er opstillet strålingstal, emissivitet og reflektans for forskellige byggematerialer.

Byggetekniske materialer kan derimod ikke opfattes som grå legemer over for solstråling (kortbølget stråling), da reflektansen varierer fra 0,05 til 0,9.

**Tabel 12.1: Strålingstal, emissivitet og reflektans for en række materialer**

Materiale	Strålingstal $\sigma$ $10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$	Emissivitet $\varepsilon$	Reflektans $\rho$
Absolut sort legeme	5,670	1,0	0
Rim	5,58	0,99	0,01
Is og vand	5,26	0,93	0,07
Byggematerialer, generelt	5,10	0,90	0,10
Egetræ, høvlet	5,07	0,90	0,10
Glas (glat)	5,32	0,94	0,06
Gips (0,5 tykt)	5,12	0,90	0,10
Papir	4,53	0,80	0,20
Tagpap	5,17	0,91	0,09
Teglsten, rød, blank, jævn	5,26	0,93	0,07
Aluminiumsbronze	2,00	0,35	0,65
Blank aluminium (folie)	0,20	0,04	0,96

### 13. Strålingsudveksling mellem vilkårlige overflader

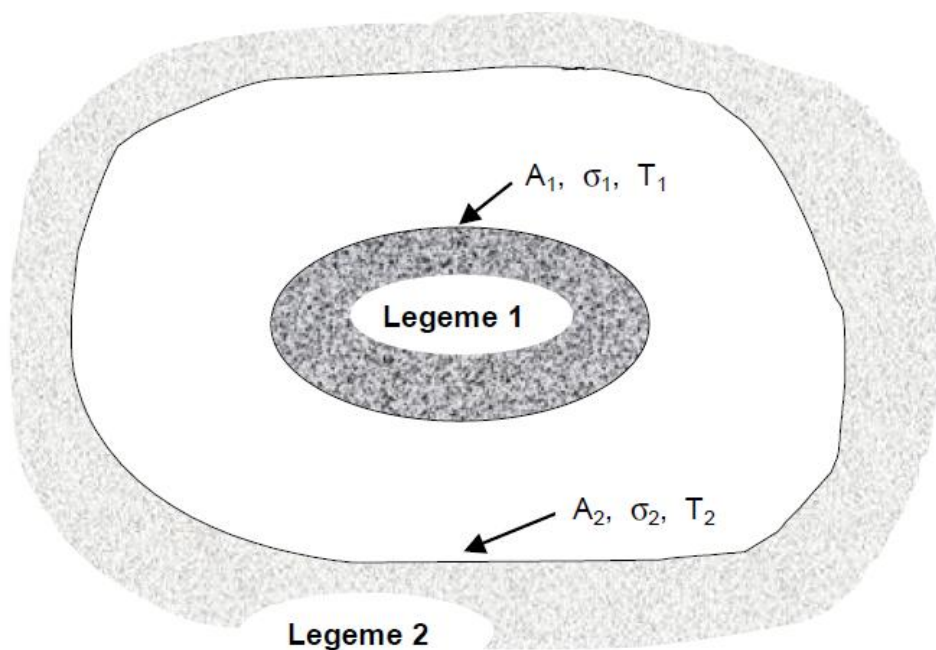
Strålingsudveksling mellem vilkårlige overflader giver anledning til meget komplicerede regninger, hvilket ligger uden for rammerne af dette kursus, men de generelle tilfælde gennemgås.

For metalliske overflader med strålingstallet  $\sigma \leq 3 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$  vil strålingen ikke ske ligeligt i alle retninger og vil derfor ikke være diffus (jf. Figur 10.1 og Figur 10.2). Jo mindre strålingstallet  $\sigma$  bliver, des større spejlende virkning får overfladen (jf. Figur 10.1).

Følgende problemstilling undersøges nærmere (jf. Figur 13.1).

Et konvekst legeme 1 med areal  $A_1$ , strålingstal  $\sigma_1$  og overfladetemperatur  $T_1$ .

Et konkavt legeme 2 med indre areal  $A_2$ , strålingstal  $\sigma_2$  og overfladetemperatur  $T_2$ , der helt omslutter legeme 1.



Figur 13.1: Konvekst legeme 1 helt omsluttet af konkavt legeme 2.

Ud fra betragtninger om strålingsudvekslingen mellem legeme 1 og 2 kan følgende ligning udledes for den resulterende strålingsudveksling mellem legeme 1 og 2:

$$\Phi_{1-2} = \frac{A_1(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\sigma_1} + \frac{A_1}{A_2} \left( \frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_s} \right)} \quad (13.1)$$

Denne ligning er analog til ligning (11.3) for sorte overflader og ligning (12.2) for grå overflader. Størrelsen af nævneren er et udtryk for både legemernes strålingstal og vinkelforholdet. Denne ligning kan også opskrives i forhold til emissiviteten.

$$\Phi_{1-2} = \frac{A_1 \cdot \sigma_s (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)} \quad (13.2)$$

Ligning (13.1) og (13.2) kan anvendes til beregning af strålingsudvekslingen mellem et legeme i et rum til rummets overflader, når blot overfladerne har samme temperatur og strålingstal.

Ligning (13.1) og (13.2) kan ligeledes anvendes til at beregne strålingsudvekslingen mellem to tætliggende parallelle overflader ( $A_1 / A_2 \approx 1$ ) idet ligningen da kan simplificeres til:

$$\Phi_{1-2} = \frac{A_1(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_s}} \quad (13.3)$$

Hvis legeme 1 derimod er meget lille og befinder sig i et stort rum, bliver  $A_1 / A_2 \approx 0$  og ligning (13.1) og (13.2) kan simplificeres til:

$$\Phi_{1-2} = \sigma_1 \cdot A_1 (T_1^4 - T_2^4) = \varepsilon_1 \cdot \sigma_s \cdot A_1 (T_1^4 - T_2^4) \quad (13.4)$$

## 14. Strålingsisolans

På samme måde som ved varmeledning og konvektion kan der findes en strålingsisolans, som beskriver, hvor meget stor en effekt strålingen overfører per arealenhed og temperatur.

$$\Phi_{1-2} = \frac{A_1(T_1 - T_2)}{R_{s,1-2}} \quad (13.5)$$

Hvor  $R_{s,1-2}$  er strålingsisolansen mellem flade 1 og 2.

Hvis strålingsudvekslingen kendes, kan strålingsisolansen findes

$$R_{s,1-2} = \frac{A_1(T_1 - T_2)}{\Phi_{1-2}} \quad (13.6)$$

Strålingsisolansen afhænger af overfladernes strålingstal.

### **Strålingsisolans mellem to sorte overflader**

$$R_{s,1-2} = \frac{T_1 - T_2}{F_{1-2} \cdot \sigma_s (T_1^4 - T_2^4)} \quad (13.7)$$

### **Strålingsisolans mellem to grå overflader**

$$R_{s,1-2} = \frac{T_1 - T_2}{F_{1-2} \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{\sigma_s} (T_1^4 - T_2^4)} \quad (13.8)$$

$$R_{s,1-2} = \frac{T_1 - T_2}{F_{1-2} \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \sigma_s (T_1^4 - T_2^4)} \quad (13.9)$$

### **Strålingsisolans mellem vilkårlige overflader**

$$R_{s,1-2} = \frac{T_1 - T_2}{T_1^4 - T_2^4} \left( \frac{1}{\sigma_1} + \frac{A_1}{A_2} \left( \frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_s} \right) \right) \quad (13.10)$$

$$R_{s,1-2} = \frac{T_1 - T_2}{\sigma_s (T_1^4 - T_2^4)} \left( \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \right) \quad (13.11)$$

Disse ligninger er gældende når betingelserne for ligning (13.1) og (13.2) er opfyldt.

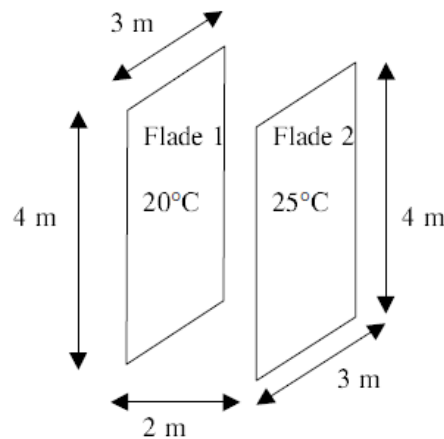
### Samlet strålingsisolans

For at finde den samlede strålingsisolans,  $R_s$  fra flade 1 til de omgivende flader er det nødvendigt at summere de enkelte modstande efter samme princip som ved parallelkoblede elektriske modstande:

$$R_s = \left( \sum_{j=2}^n \frac{1}{R_{s,j-1}} \right) \quad (13.12)$$

### Eksempel: Resulterende varmestråling fra flade 1 til flade 2 (grå overflader) samt bestemmelse af strålingsisolansen.

Bestem den resulterende varmestrøm mellem flade 1 og flade 2. Begge flader opfattes som byggetekniske materialer (grå overflader).



I tidligere eksempel blev vinkelforholdet beregnet til:  $F_{1-2} = 0,36$ .

Fra Tabel 12.1 findes strålingstallene for overflade 1 og 2 til:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 5,10 \cdot 10^{-8} \text{ W / m}^2 \text{ K}^4 \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,90$$

Af ligning (12.2) og (12.3) kan strålingsudvekslingen herefter findes enten ved brug af strålingstallet eller ved brug af emissiviteten.

$$\Phi_{1-2} = F_{1-2} \cdot A_1 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \sigma_s (T_1^4 - T_2^4) \quad \Phi_{1-2} = F_{1-2} \cdot A_1 \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{\sigma_s} (T_1^4 - T_2^4)$$

$$\Phi_{1-2} = 0,3612 \cdot 0,90 \cdot 9,5,670 \cdot 10^{-8} (293,15^4 - 298,15^4)$$

$$\Phi_{1-2} = 0,3612 \frac{5,10 \cdot 10^{-8} \cdot 5,10 \cdot 10^{-8}}{5,670 \cdot 10^{-8}} (293,15^4 - 298,15^4)$$

$$\Phi_{1-2} = -102 \text{ W}$$

Hvad er strålingsisolansen  $R_s$  mellem flade 1 og 2? Ligning (13.8) og (13.9) benyttes og giver:

$$R_{s,1-2} = \frac{T_1 - T_2}{F_{1-2} \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \sigma_s (T_1^4 - T_2^4)} \quad R_{s,1-2} = \frac{T_1 - T_2}{F_{1-2} \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{\sigma_s} (T_1^4 - T_2^4)}$$

$$R_{s,1-2} = \frac{293,15 - 298,15}{0,360,9 \cdot 0,95,670 \cdot 10^{-8} (293,15^4 - 298,15^4)}$$

$$R_{s,1-2} = \frac{293,15 - 298,15}{0,36 \frac{5,10 \cdot 10^{-8} \cdot 5,10 \cdot 10^{-8}}{5,670 \cdot 10^{-8}} (293,15^4 - 298,15^4)}$$

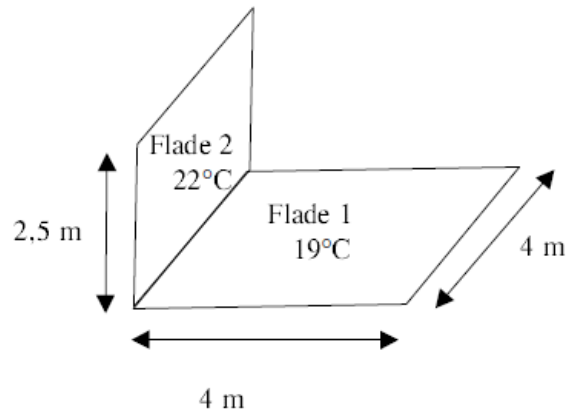
$$R_{s,1-2} = 0,59 \text{ m}^2 \text{ K} / \text{ W}$$

Hvis strålingsudvekslingen kendes, kan strålingsisolansen findes ved brug af ligning (13.6).

$$R_{s,1-2} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{1-2}} A_1 = \frac{293,15 - 298,15}{-102} \cdot 12 = 0,59 \text{ m}^2 \text{ K} / \text{ W}$$

**Øvelse: Bestem den resulterende varmestrøm mellem flade 1 og 2 (grå legemer) samt strålingsisolansen**

Bestem den resulterende varmestrøm mellem flade 1 og 2, idet begge materialer opfattes som grå overflader. Bestem desuden strålingsisolansen.



Løsning:

$$F_{1-2} = 0,165$$

$$\Phi_{1-2} = -36,7 \text{ W}$$

$$R_s = 1,31 \text{ m}^2 \text{ K} / \text{ W}$$







## Bilag 1: Skema til varmetransmission

Lagets materiale	Tykkelse s [m]	Varme- ledningsevne $\lambda$ [W/mK]	Isolans $R_m = s/\lambda$ [m <sup>2</sup> K/W]	Temperatur- forskelle $\Delta T$ [K/°C]	Temperatur T [K/°C]
Udvendig overgangsisolans					
Indvendig overgangsisolans					
$\Sigma R$ og $\Sigma \Delta T$					

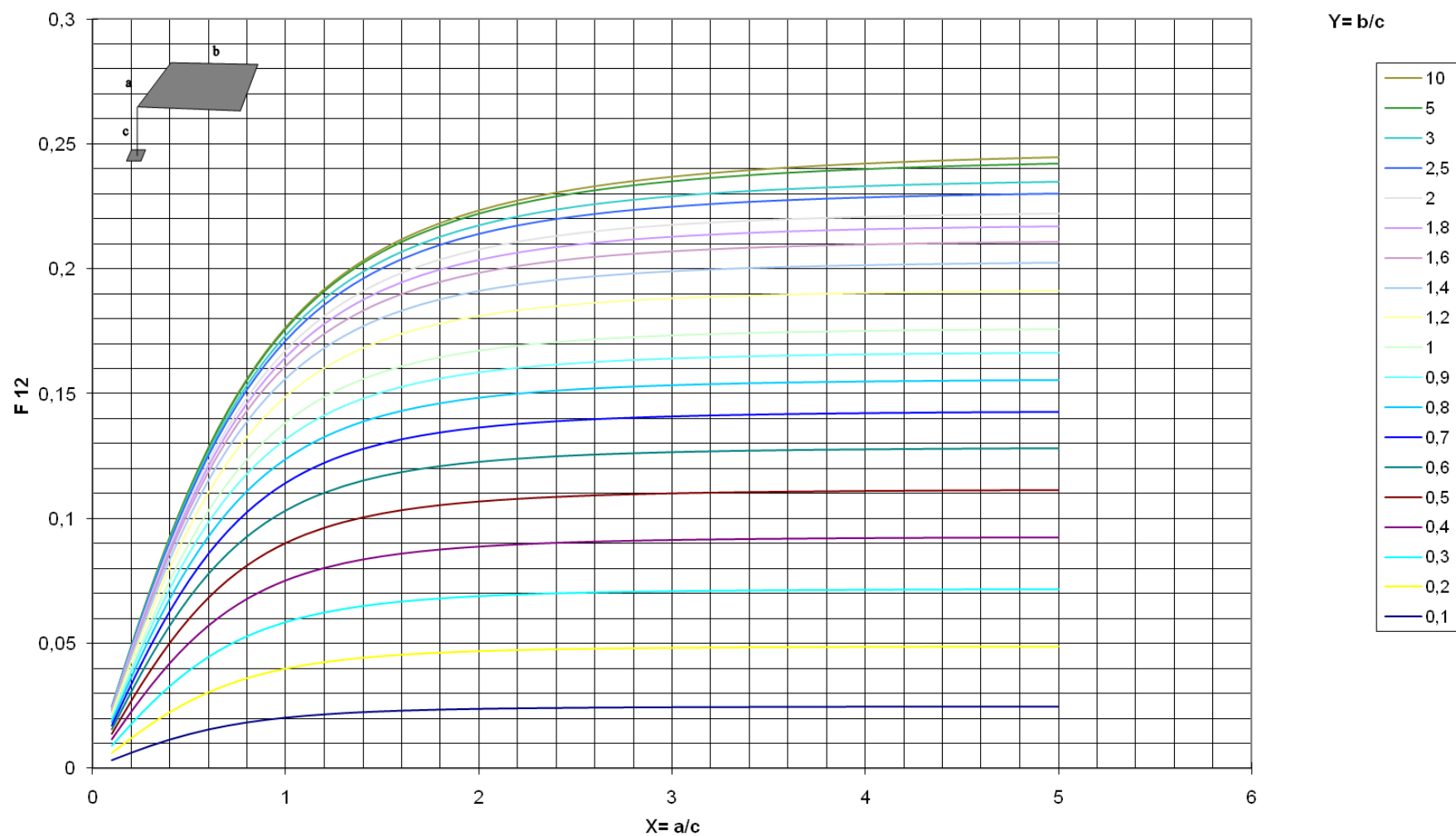
Eftersom der tages udgangspunkt i temperaturforskellen kan temperaturen indsættes i °C i stedet for K

Transmissionskoefficient:  $U = \frac{1}{\sum R_m}$

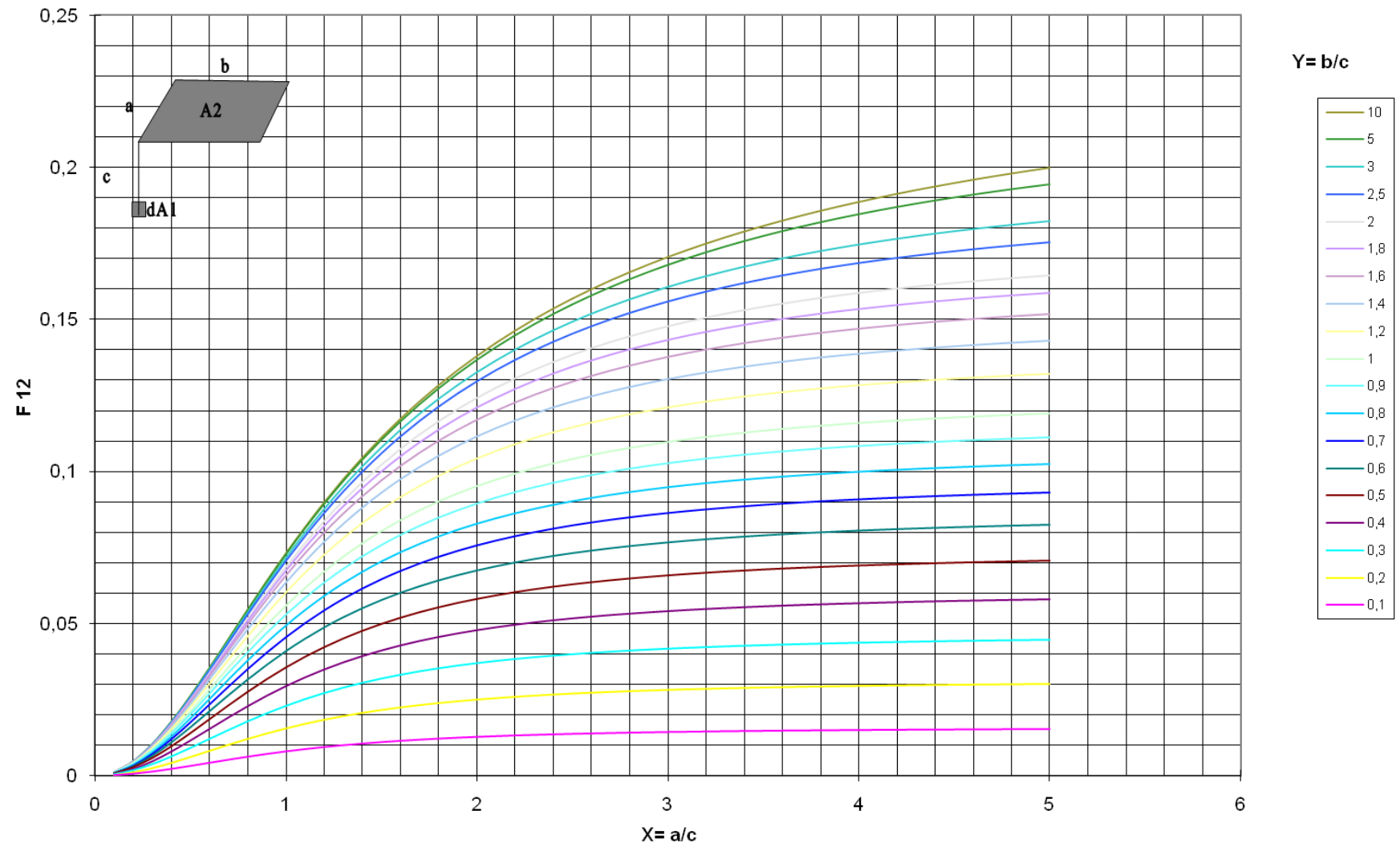
Temperaturforskelle:  $\Delta T = \frac{R_m}{\sum R} (T_i - T_e)$

## Bilag 2: Diagrammer til bestemmelse af vinkelforholdet

Vinkelforhold fra et fladeelement til et dermed parallelt rektangel

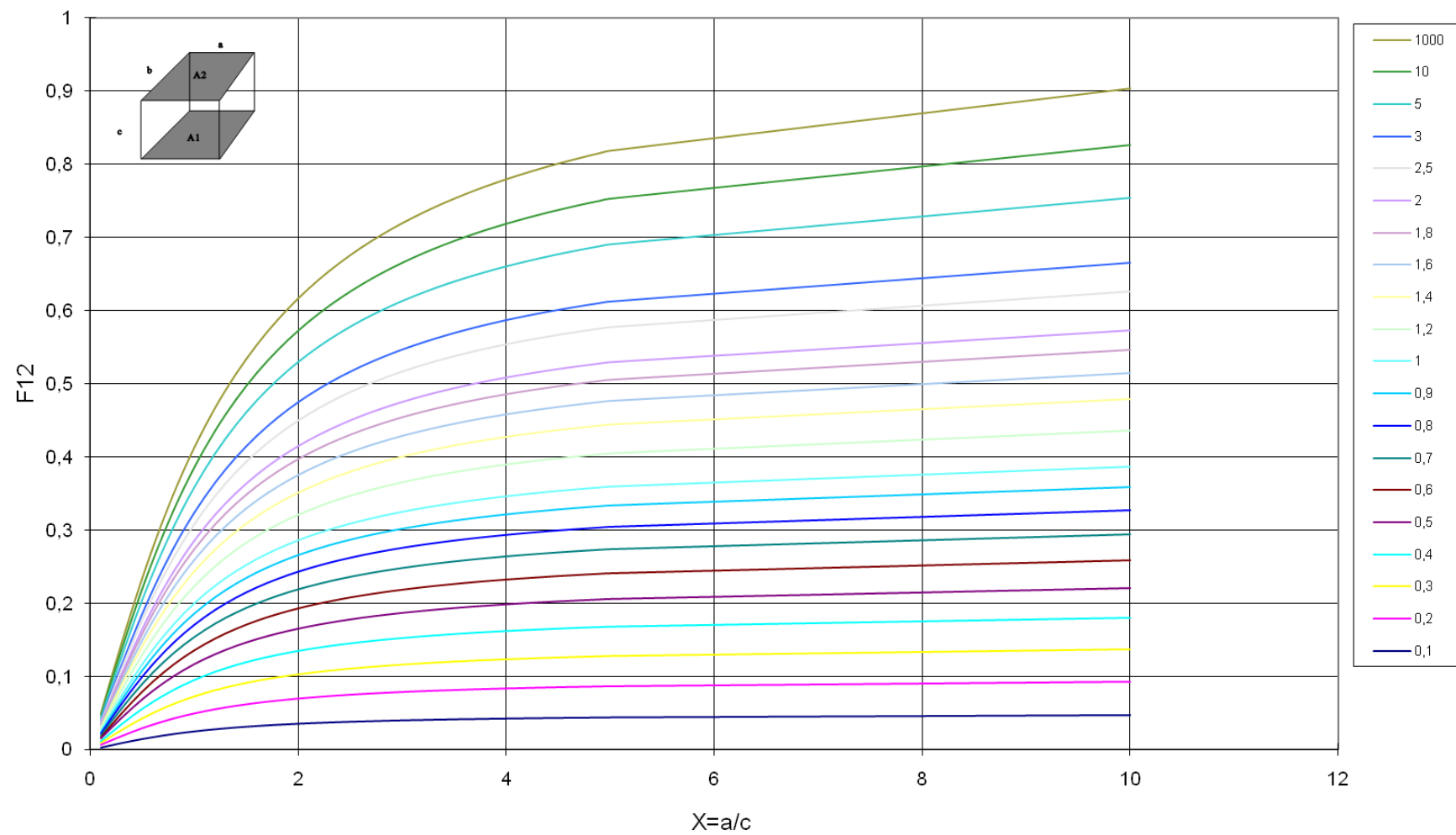


# Vinkelforhold fra et fladeelement til et vinkelret herpå liggende rektangel



# Vinkelforhold mellem to parallelle, lige store, over for hinanden liggende rektangler

$Y = b/c$



# Vinkelforhold mellem to vinkelret på hinanden stående rektangler med en fælles kant

